Álgebra Linear

Prof. Dr. Rogério Vargas[1]

[1]Centro de Estudos do Mar
Universidade Federal do Paraná

2024

Vamos nos conhecer?

Olá! Bem-vindo a componente **Álgebra Linear**. Este material contém um direcionamento das aulas realizadas.

O professor
Apresentação no prezi. Clique aqui.

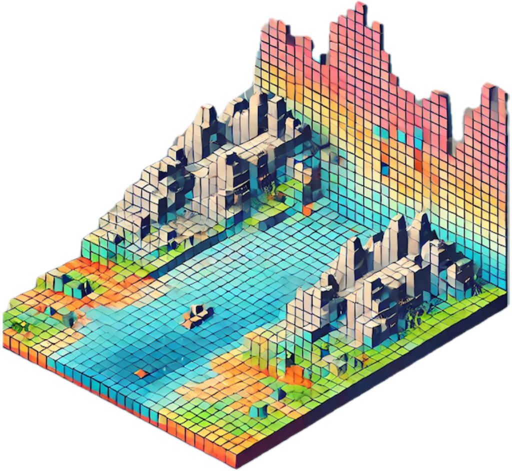
Aprovação
Frequência e avaliações.

Mas afinal, o que veremos na componente?

Conteúdo das Aulas I

Encontro 2: Espaços Vetoriais e Subespaços

Espaço vetorial



Espaço vetorial

- Exemplo do pote, vários vetores
- Rótulo do pote com as operações
- Quais os vetores poderão entrar no pote
- Como é feito a adição e o produto de um vetor por um escalar
- Como é feito essas operações em vetor em Geometria Analítica?
- Conjunto de vetores $\times$ espaço vetorial

Pote 1

- Aceita vetores no formato (x, y, z)
- Soma ou subtração:
  $(x_1, y_1, z_1) \pm (x_2, y_2, z_2)$
- Multiplicação por um escalar:
  $\alpha(x_1, y_1, z_1)$
- Estão em $\mathbb{R}$
- Operação **usual**
- É um $\mathbb{R}^3$

Pote 2

- Aceita vetores no formato $(x, y, 1)$
- Soma ou subtração:
  $(x_1, y_1, z_1) \pm (x_2, y_2, z_2) =$
  $(x_1.y_2, y_1 + y_2, 1)$
- Operação não usual
- Multiplicação por um escalar:
  $\alpha(x_1, y_1, z_1)$
- Operação usual

Espaço vetorial

Um espaço vetorial real é uma trinca $(V, \oplus, \otimes)$ que cumpre:

- V é um conjunto não vazio
- Dados $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2} \in V$, $\vec{v_1} \oplus \vec{v_2}$ também deve pertencer a V
- Dado $\vec{v_1} \in V$ a multiplicação por escalar $\alpha \otimes \vec{v_1}$ também deve pertencer a V

Axiomas

Cumprir os axiomas. Sobre $\oplus$:

- Comutativa:

$$\vec{v_1} \oplus \vec{v_2} = \vec{v_2} \oplus \vec{v_1}$$

- Associativa:

$$(\vec{v_1} \oplus \vec{v_2}) \oplus \vec{v_3} = \vec{v_1} \oplus (\vec{v_2} \oplus \vec{v_3})$$

- Elemento neutro
  Dentro do espaço vetorial, deve existir um elemento 0 tal que

$$\vec{v_1} \oplus 0 = \vec{v_1}$$

- Elemento simétrico
  Para todo $\vec{v}$ dentro de V, deve existir algum $\vec{w}$ tal que:

$$\vec{v} \oplus \vec{w} = 0$$

Axiomas

Cumprir os axiomas. Sobre $\otimes$:

- Associatividade:
$$(\alpha.\beta).\vec{v} = \alpha.(\beta.\vec{v})$$
- Elemento neutro da multiplicação:
$$1.\vec{v} = \vec{v}$$
- $\alpha.(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
- $\vec{v}.(\alpha + \beta) = \vec{v}.\alpha + \vec{v}.\beta$

Vamos verificar: Pote 1

$$V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
$$\alpha \otimes (x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

Vamos verificar: Pote 2

$W = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 1$
$(x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2) = (x_1.y_2, y_1.y_2, 1)$
$\alpha \otimes (x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$

Subespaço vetorial

Se W for um espaço vetorial, podemos dizer que ele é um *subespaço vetorial* de V. Ou seja,

> Se tivermos um espaço vetorial $(V, \oplus, \otimes)$. Se W é um subconjunto não vazio de V. Se $(W, \oplus, \otimes)$ for espaço vetorial, então ele é um subespaço vetorial de V.

Subespaço vetorial

Mas como sabemos se W é ou não um espaço vetorial?

- Vamos ter que provar que cada um dos axiomas a esse espaço?
- Não! Nós vamos aproveitar que V já é um espaço vetorial, podendo diminuir a quantidade de axiomas.

Subespaço vetorial

Para que $(W, \oplus, \otimes)$ seja um subespaço vetorial, temos que ter:

- $0 \in W$
- $\vec{w_1} \oplus \vec{w_2} \in W$, para todo $\vec{w_1}, \vec{w_2} \in W$
- $\alpha.\vec{w} \in W$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{w} \in W$

Subespaço vetorial

Todo espaço vetoria V tem pelo menos 2 subespaços vetoriais:

> - Ele mesmo
> - 0

Exercícios

1. Verifique se $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.
2. Verifique se $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.
3. Determine se U é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.
   $U = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | a, c \in \mathbb{R}, b = a + c + 1\}$
4. Determine se V é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.
   $V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | a, b \in \mathbb{R}, 5c = 2a + 3b\}$

Importante!

Este material é exclusivo de uso do autor. Proibido copiar ou replicar.

rogeriovargas@ufpr.br

GEOIDELAB

UFPR

Álgebra Linear

Prof. Dr. Rogério Vargas[1]

[1]Centro de Estudos do Mar
Universidade Federal do Paraná

2024