

[Home](#)

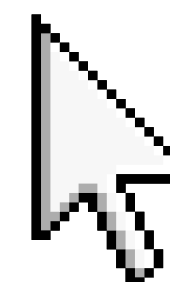
[Content](#)

[Contact](#)

Regressão por

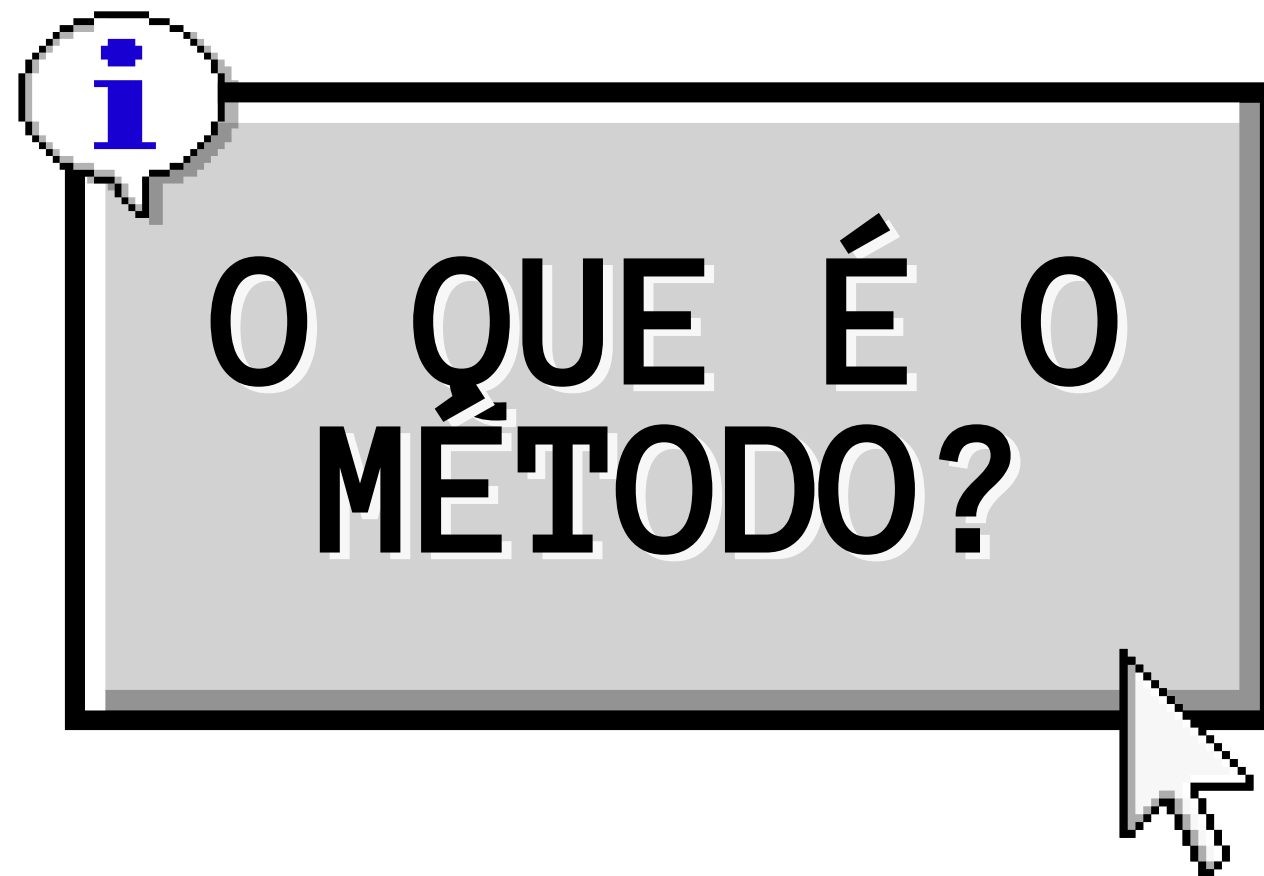
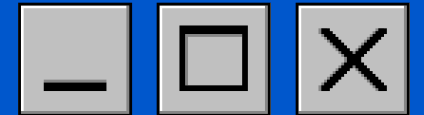
# MÍNIMOS

QUADRADOS



Start

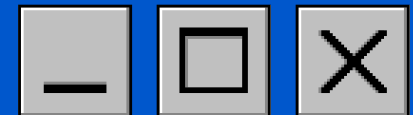




*"[...] tentar obter os valores dos coeficientes, de modo que a soma dos quadrados das distâncias da referida curva, para cada um dos pontos dados, seja a mínima possível."*

Sodré, 2020





Home

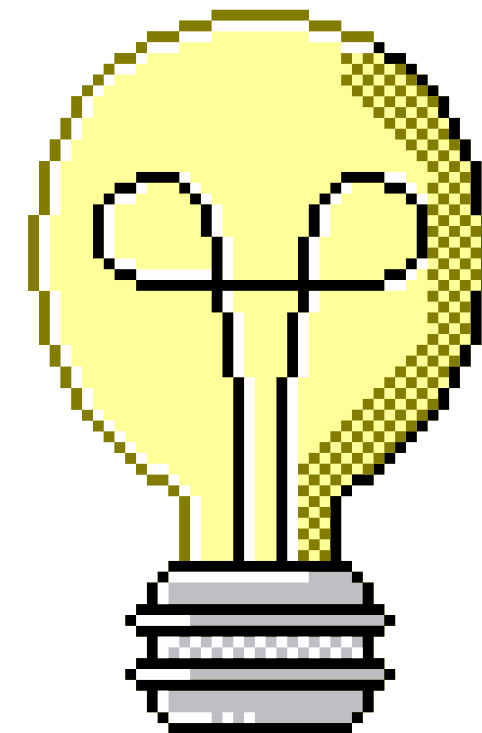
Content

Contact



## INTERPOLAÇÃO X AJUSTE

| Comparativo      | Interpolação                       | Ajuste por MMQ                      |
|------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| Objetivo         | Passar exatamente pelos pontos     | Aproximar os pontos com erro mínimo |
| Erro permitido   | Nenhum (erro = 0)                  | Erro presente, mas minimizado       |
| Recomendado para | Funções conhecidas, tabelas exatas | Dados experimentais com ruído       |
| Resultado        | Curva que toca todos os pontos     | Curva que representa a tendência    |





Home

Content

Contact

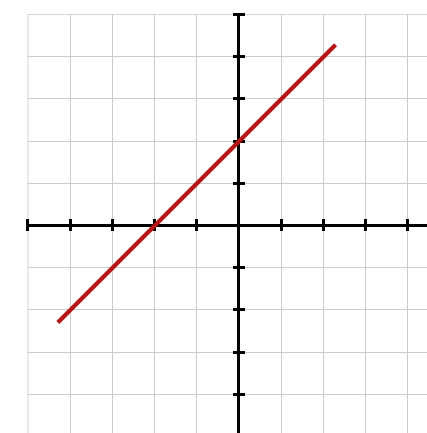


## TIPOS DE AJUSTES

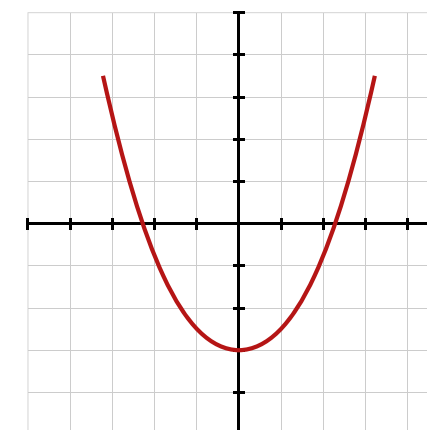
LINEAR

POLINOMIAL

Alguns dados têm comportamento linear (reta)

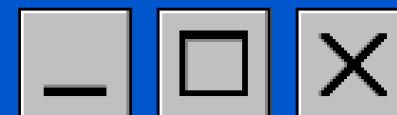


Outros não são lineares (curvas parabólicas, exponenciais, logarítmicas etc.);



O tipo de ajuste depende do comportamento físico ou ambiental dos dados.





Home

**Content**

Contact



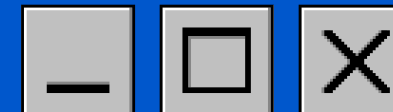
**TIPOS DE AJUSTES**

LINEAR



POLINOMIAL





Home

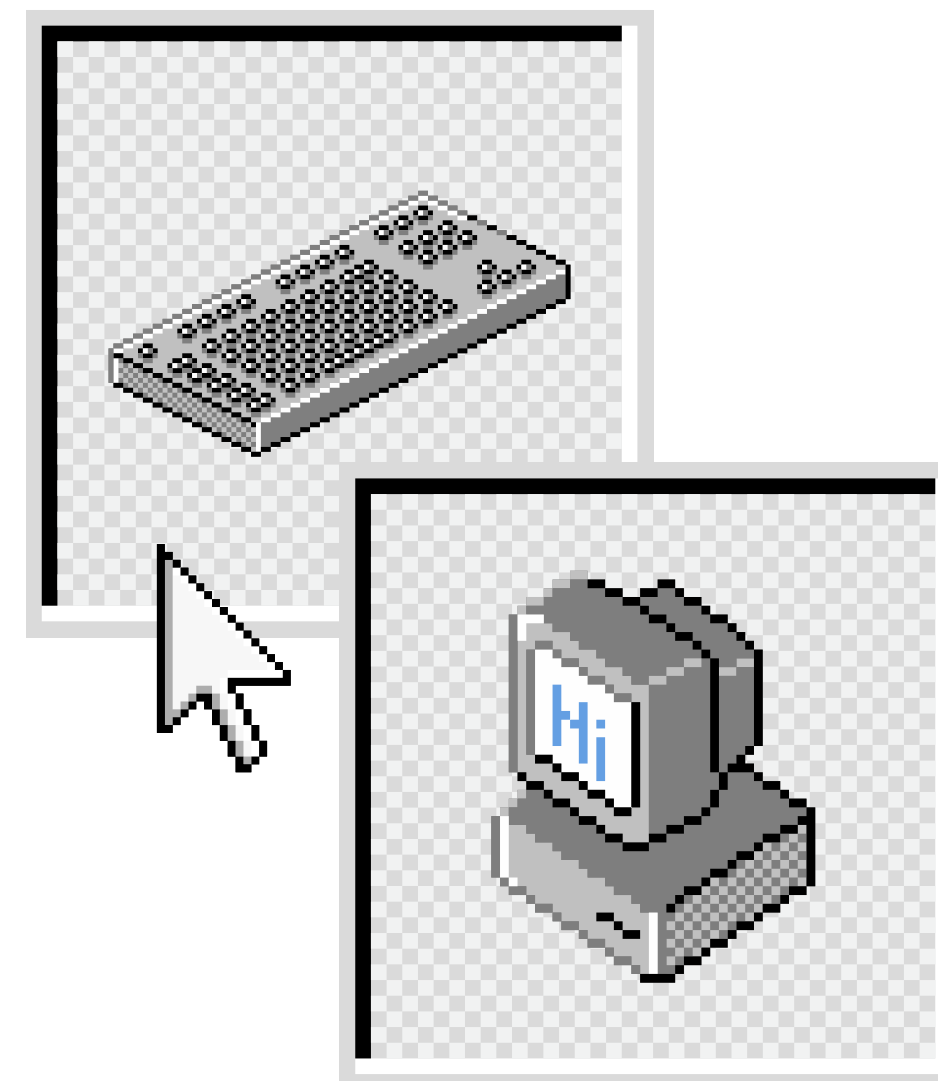
Content

Contact

# AJUSTE LINEAR

EQUAÇÃO:  
 $y = ax + b$

Usado quando a variável dependente varia de forma constante em relação à independente.





# AJUSTE POLINOMIAL

EQUAÇÃO:

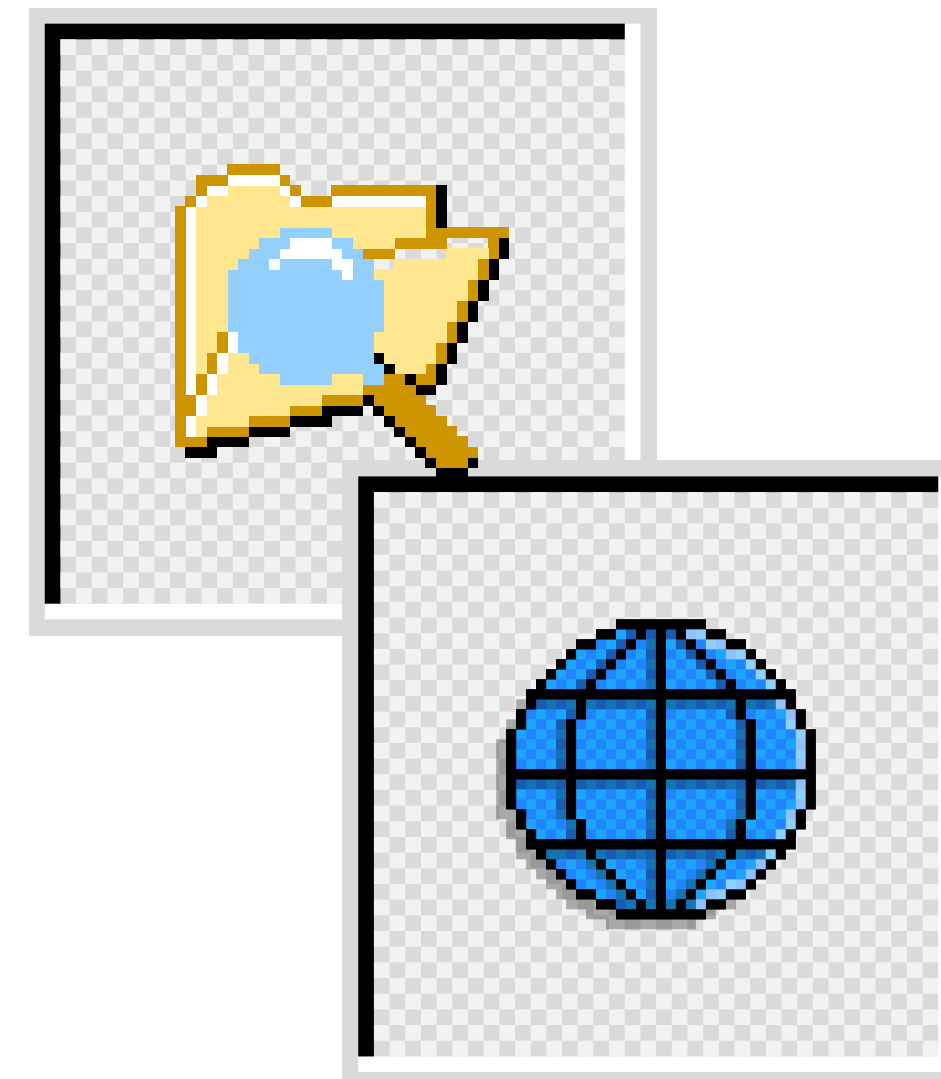
$$y = ax^2 + bx + c$$

- Usado quando há uma 'curvatura' nos dados.
- Requer três equações com os somatórios:

$$\Sigma x, \Sigma x^2, \Sigma x^3, \Sigma x^2y$$

- As equações se originam de minimizar a função erro:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2$$

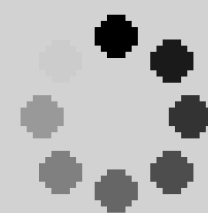




Home

**Content**

Contact



## EXEMPLO

Equações normais e matriz de coeficientes

Conjunto de dados:

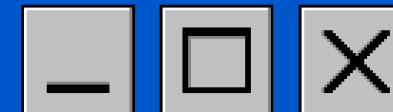
| $x_i$ | $y_i$ |
|-------|-------|
| 1     | 2     |
| 2     | 3     |
| 3     | 5     |
| 4     | 4     |

Objetivo – ajustar  
uma reta da forma:

$$y = ax + b$$



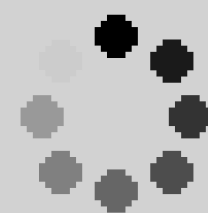




Home

**Content**

Contact



# EXEMPLO

Equações normais e matriz de coeficientes

Conjunto de dados:

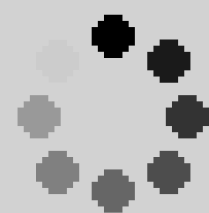
| $x_i$ | $y_i$ |
|-------|-------|
| 1     | 2     |
| 2     | 3     |
| 3     | 5     |
| 4     | 4     |

Objetivo – ajustar  
uma reta da forma:

$$y = ax + b$$

**Passo 1** – somatórios



[Home](#)[Content](#)[Contact](#)

## EXEMPLO

Equações normais e matriz de coeficientes

Conjunto de dados:

| $x_i$ | $y_i$ |
|-------|-------|
| 1     | 2     |
| 2     | 3     |
| 3     | 5     |
| 4     | 4     |

Objetivo – ajustar  
uma reta da forma:

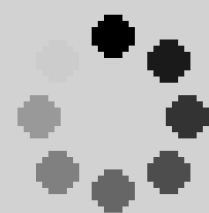
$$y = ax + b$$

Passo 2 – equações normais

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x \\ \Sigma x & \Sigma x^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma xy \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 39 \end{bmatrix}$$



[Home](#)[Content](#)[Contact](#)

## EXEMPLO

Equações normais e matriz de coeficientes

Conjunto de dados:

| $x_i$ | $y_i$ |
|-------|-------|
| 1     | 2     |
| 2     | 3     |
| 3     | 5     |
| 4     | 4     |

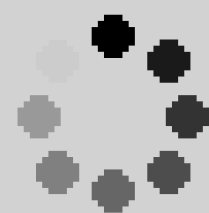
Objetivo – ajustar  
uma reta da forma:

$$y = ax + b$$

**Passo 3** – multiplicação de matrizes

$$\begin{aligned}4a_0 + 10a_1 &= 14 \\ 10a_0 + 30a_1 &= 39\end{aligned}$$



[Home](#)[Content](#)[Contact](#)

## EXEMPLO

Equações normais e matriz de coeficientes

Conjunto de dados:

| $x_i$ | $y_i$ |
|-------|-------|
| 1     | 2     |
| 2     | 3     |
| 3     | 5     |
| 4     | 4     |

Objetivo – ajustar  
uma reta da forma:

$$y = ax + b$$

Passo 4 – resolver o sistema

$$\begin{cases} 4a_0 + 10a_1 = 14 \\ 10a_0 + 30a_1 = 39 \end{cases}$$

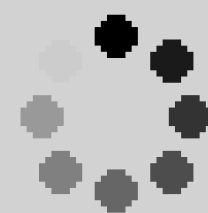




Home

Content

Contact



# EXEMPLO

Equações normais e matriz de coeficientes

Conjunto de dados:

| $x_i$ | $y_i$ |
|-------|-------|
| 1     | 2     |
| 2     | 3     |
| 3     | 5     |
| 4     | 4     |

Objetivo – ajustar  
uma reta da forma:

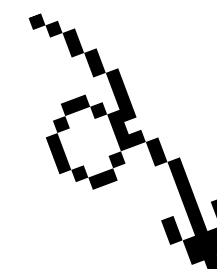
$$y = ax + b$$

Passo 5 – substituir na equação linear

$$y = a_0 + a_1 x$$

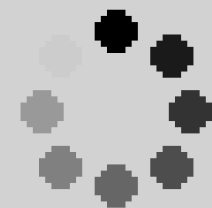
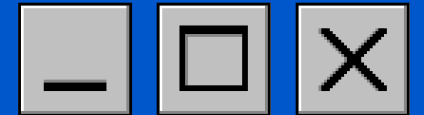
$$a_0 = 1,5 \quad a_1 = 0.8$$

$$y = 1,5 + 0,8x$$



Essa é nossa  
equação da reta  
ajustada!





## EXEMPLO

Equações normais e matriz de coeficientes

$$y = 0,8x + 1,5$$

- $a_0 = 1.5$ : valor estimado de  $y$  quando  $x = 0$ .
- $a_1 = 0.8$ : para cada aumento de 1 unidade em  $x$ , espera-se um aumento de 0.8 unidades em  $y$ .
- Esse modelo pode ser usado para estimar valores de  $y$  para  $x$  fora da amostra, como  $x = 5 \Rightarrow y = 1.5 + 0.8 \cdot 5 = 5.5$





[Home](#)

**[Content](#)**

[Contact](#)



## APLICAÇÃO PRÁTICA PARA EAS



Avaliação da  
eficiência de  
remoção de fósforo  
em função da dosagem  
de reagente em um  
reator químico.

POLINOMIAL





Home

Content

Contact

## POLINOMIAL

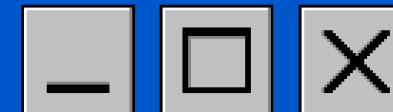
Avaliação da eficiência de remoção de fósforo em função da dosagem de reagente em um reator químico.



```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
```







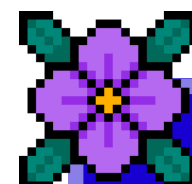
[Home](#)

[Content](#)

[Contact](#)

## POLINOMIAL

Avaliação da eficiência de remoção de fósforo em função da dosagem de reagente em um reator químico.



```
5 x = np.array([0, 5, 10, 15, 20, 25,  
6             30, 35, 40, 45, 50], dtype=float)  
7 y = np.array([5, 22, 38, 53, 65, 71,  
8             74, 72, 65, 54, 40], dtype=float)  
9 n = len(x)
```





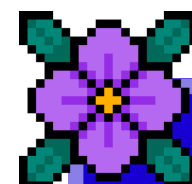
Home

Content

Contact

## POLINOMIAL

Avaliação da eficiência de remoção de fósforo em função da dosagem de reagente em um reator químico.



```
12 Sx = np.sum(x)
13 Sx2 = np.sum(x**2)
14 Sx3 = np.sum(x**3)
15 Sx4 = np.sum(x**4)
16 Sy = np.sum(y)
17 Sxy = np.sum(x * y)
18 Sx2y = np.sum(x**2 * y)
```





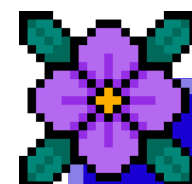
Home

Content

Contact

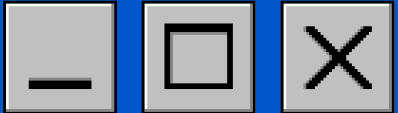
## POLINOMIAL

Avaliação da eficiência de remoção de fósforo em função da dosagem de reagente em um reator químico.



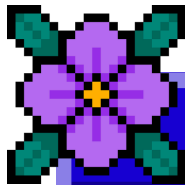
```
21 A = np.array([
22     [Sx4, Sx3, Sx2],
23     [Sx3, Sx2, Sx ],
24     [Sx2, Sx , n  ]
25 ], dtype=float)
26
27 B = np.array([Sx2y, Sxy, Sy], dtype=float)
```





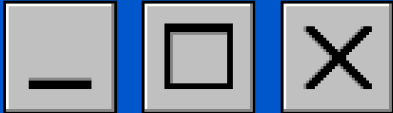
**POLINOMIAL**

Avaliação da eficiência de remoção de fósforo em função da dosagem de reagente em um reator químico.



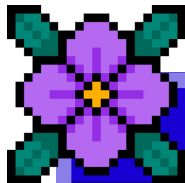
```
30 a, b, c = np.linalg.solve(A, B)
31 print(f"Equação ajustada: y = {a:.4f}x² + {b:.4f}x + {c:.4f}")
32 x_plot = np.linspace(0, 50, 200)
33 y_plot = a * x_plot**2 + b * x_plot + c
```





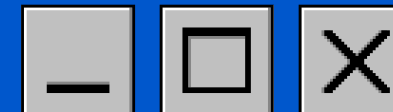
POLINOMIAL

Avaliação da eficiência de remoção de fósforo em função da dosagem de reagente em um reator químico.



```
36 plt.figure(figsize=(8, 5))
37 plt.scatter(x, y, label='Dados Experimentais', color='blue')
38 plt.plot(x_plot, y_plot, label='Ajuste Polinomial (MMQ)', color='orange')
39 equacao_texto = f'y = {a:.4f}x² + {b:.4f}x + {c:.4f}'
40 plt.text(2, max(y) - 5, equacao_texto, fontsize=11, color='black')
41 plt.xlabel('Dosagem de Reagente (mg/L)')
42 plt.ylabel('Eficiência de Remoção (%)')
43 plt.title('Ajuste Polinomial de 2º Grau - MMQ')
44 plt.legend()
45 plt.grid(True)
46 plt.show()
```





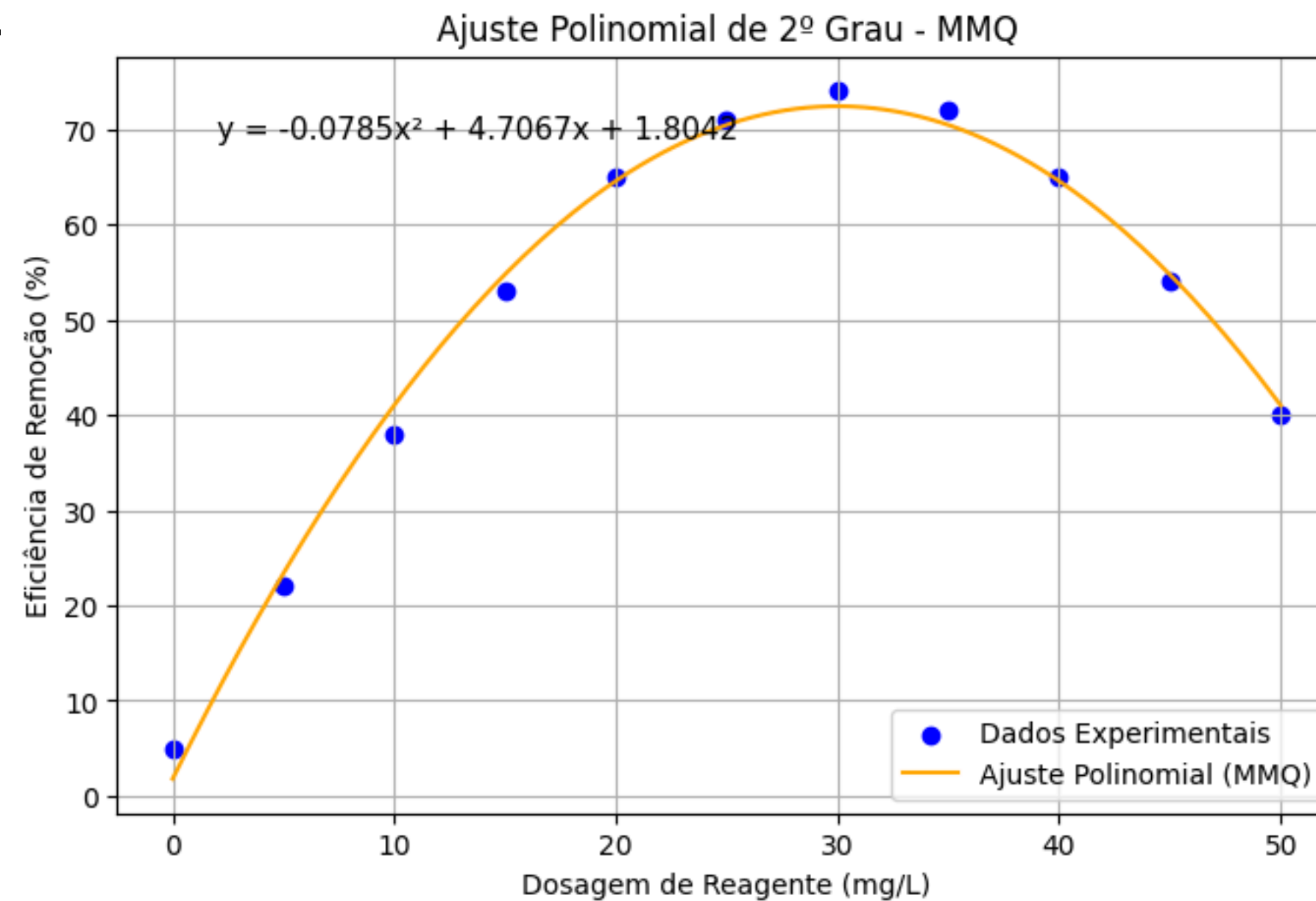
Home

Content

Contact

## POLINOMIAL

Avaliação da eficiência de remoção de fósforo em função da dosagem de reagente em um reator químico.





[Home](#)

[Content](#)

[Contact](#)



MUITO  
OBRIGADO!





# REFERÊNCIAS

ANÔNIMO. Método dos Mínimos Quadrados. Disponível em: <http://fisica.ufpr.br/graff/MMQ%20web.pdf>. Acesso em: 8 jun. 2025.

FERREIRA, Diego Anunciação et al. Ajuste de Curvas: Aplicações do Método dos Mínimos Quadrados na Engenharia. Revista Eletrônica Científica Inovação e Tecnologia, v. 1, n. 1, 2013. Disponível em: <https://www.redalyc.org/pdf/3959/395940078013.pdf>. Acesso em: 8 jun. 2025.

HASSAN, A. S.; SANTOS, J. F. dos; SANTOS, A. A. dos. Matemática Essencial: Álgebra Linear – Método dos Mínimos Quadrados. Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF. Disponível em: <https://www.uel.br/projetos/matessencial/basico/fundamental/123fundamental.html>. Acesso em: 8 jun. 2025.

LOBÃO, Diomar César. Introdução aos Métodos Numéricos. Trabalho original preparado por: IONILDO, José Sanches; FURLAN, Diógenes Lago. Universidade Federal do Paraná, Departamento de Informática. Universidade Federal Fluminense – Volta Redonda. Disponível em: [http://www.professores.uff.br/diomar\\_cesar\\_lobao](http://www.professores.uff.br/diomar_cesar_lobao). Acesso em: 8 jun. 2025.

