



INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE

Alunos (as): Camily Lima, Estephany Vicente e Pedro Azzolini

CONTEÚDOS

◆ 01 – INTRODUÇÃO AO
MÉTOD

◆ 02 – FUNDAMENTAÇÃO
TEÓRICA

◆ 03 – CARACTERÍSTICA DO
MÉTOD

◆ 04 – FUNÇÃO EM PHYTON

◆ 05 – PLANILHA DE
ITERAÇÕES

◆ 06 – EXEMPLO NA ENG.
AMBIENTAL E SANITÁRIA

◆ 07 – EXEMPLO NA ENG. CIVIL

◆ 08 – EXERCÍCIOS
RESOLVIDOS

INTRODUÇÃO AO MÉTODO

A interpolação de Lagrange é um método numérico usado para encontrar um **polinômio** que passa exatamente por um conjunto de pontos dados. A partir de alguns pares (x, y) , ele permite estimar valores intermediários da função.

Onde é usado?

É aplicado em áreas como engenharia, computação, física e estatística, especialmente quando se precisa **aproximar funções desconhecidas** a partir de dados experimentais ou tabelados.

Por que é importante?

- Evita o erro de aproximação de funções complexas;
- É uma alternativa simples e eficaz quando não se conhece a função exata;
- Serve de base para outros métodos mais avançados em análise numérica.

◆ FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

- **Conceito Principal**

A interpolação de Lagrange encontra um polinômio que passa exatamente por um conjunto de pontos conhecidos. É útil para estimar valores de uma função quando só temos alguns dados discretos.

◆ FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

- **Fórmula do Polinômio de Lagrange**

Dado um conjunto de **n+1** pontos distintos:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

O polinômio interpolador é:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot L_i(x)$$

Onde:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Cada $L_i(x)$ é chamado de **polinômio base de Lagrange**.

◆ FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

• Exemplo

Dado os pontos:

- (1, 2)
- (2, 3)
- (4, 1)

Montamos:

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(-1)(-3)} = \frac{(x-2)(x-4)}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = \frac{(x-1)(x-4)}{(1)(-2)} = -\frac{(x-1)(x-4)}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(3)(2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{6}$$

Logo:

$$P(x) = 2 \cdot L_0(x) + 3 \cdot L_1(x) + 1 \cdot L_2(x)$$

◆ CARACTERÍSTICAS DO MÉTODO

- **Baseado em polinômios:** Utiliza um polinômio único que passa por todos os pontos dados.
- **Não requer sistema linear:** A fórmula é direta, sem necessidade de resolver equações.
- **Simples de implementar para poucos pontos.**
- **Polinômios independentes:** Cada termo $L_i(x)$ depende apenas dos dados e não de valores intermediários.

◆ CARACTERÍSTICAS DO MÉTODO

Vantagens

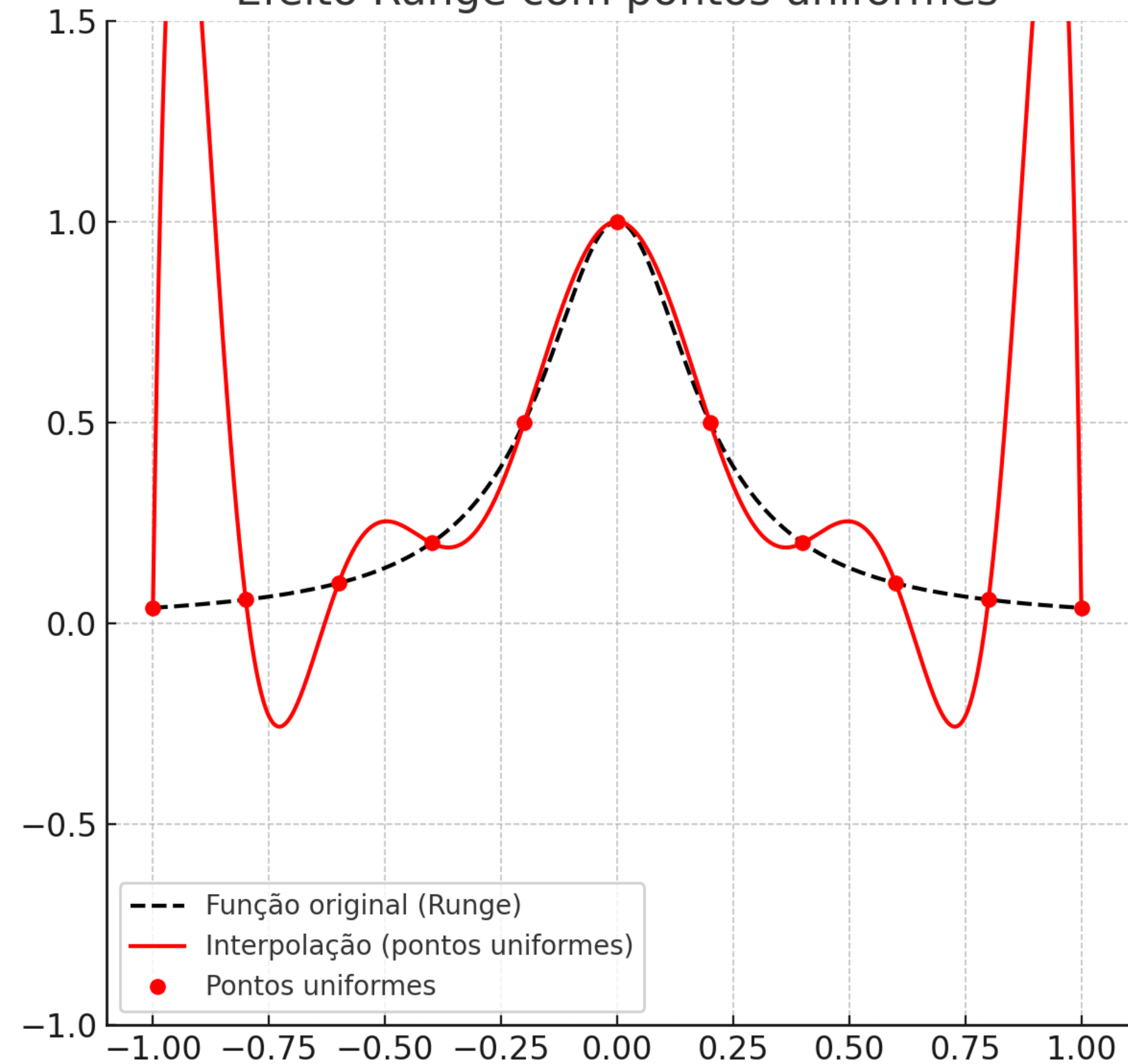
- **Fácil compreensão e aplicação** para um número pequeno de pontos.
- **Fórmula explícita:** Permite calcular diretamente o valor interpolado em qualquer ponto.
- **Não exige cálculo iterativo** ou derivadas.
- Boa base para ensino de interpolação e fundamentos numéricos.

◆ CARACTERÍSTICAS DO MÉTODO

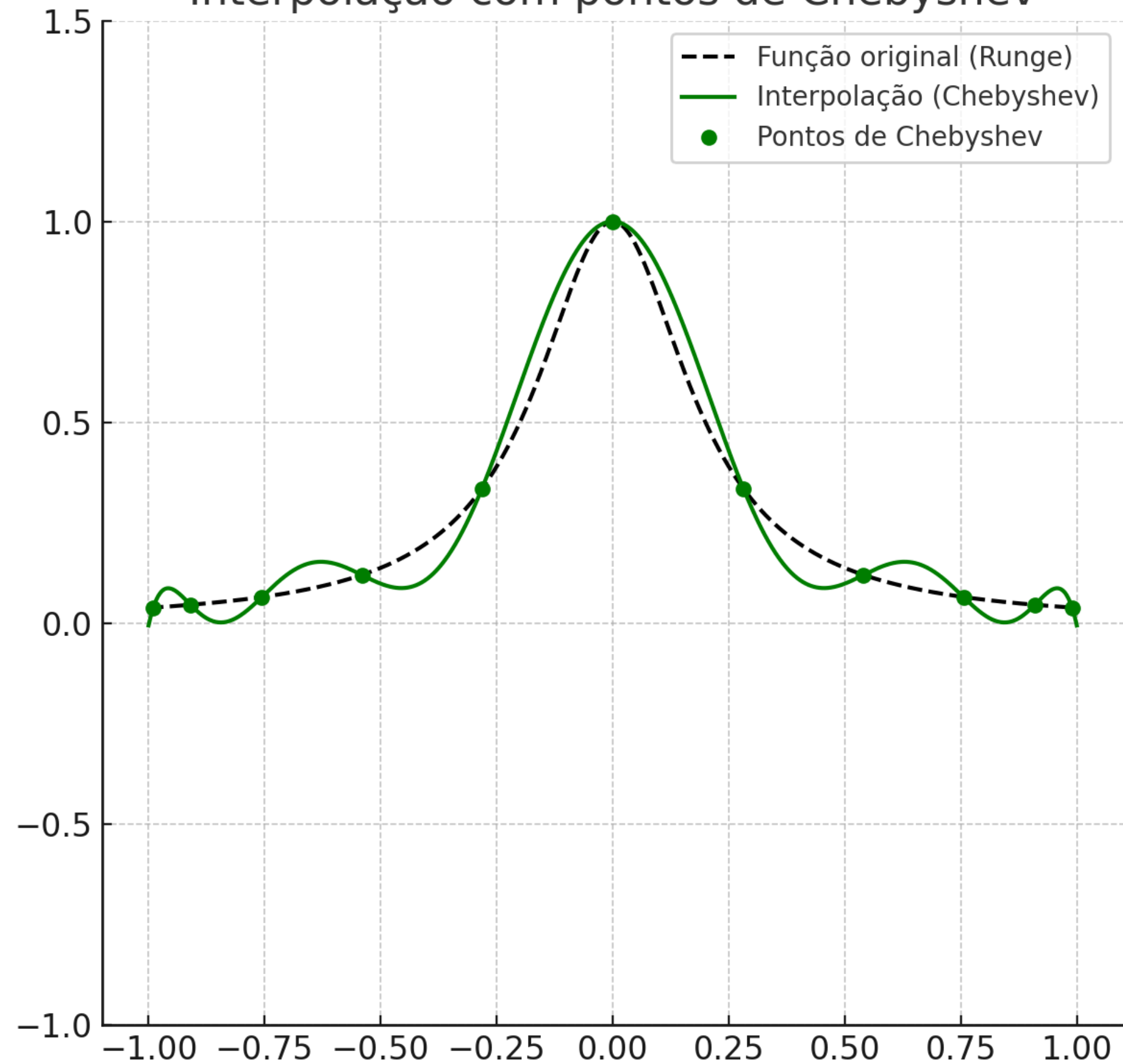
Desvantagens / Limitações

- **Pouco eficiente para muitos pontos:** O grau do polinômio aumenta e o cálculo fica mais complexo.
- **Oscilações indesejadas (efeito Runge):** Em especial com muitos pontos ou intervalos grandes.
- **Necessita recalcular tudo** se um novo ponto for adicionado.
- Menos estável e preciso do que **splines** em casos com muitos dados.

Efeito Runge com pontos uniformes



Interpolação com pontos de Chebyshev



EXEMPLO EM PHYTON

Exemplo 01: Estimativa de temperatura

Um engenheiro precisa estimar a temperatura do solo em uma região, com base em medições feitas às 6h, 9h e 12h. Os dados registrados foram:

- 6h → 15 °C
- 9h → 21 °C
- 12h → 27 °C

Estime qual era a temperatura às 10h utilizando o método de interpolação de Lagrange.

EXEMPLO EM PHYTON

Exemplo 02: Estimativa da concentração de poluente em um rio

Durante uma análise ambiental, foram medidas as concentrações de um poluente em um rio nos seguintes horários:

- 8h → 12 mg/L
- 10h → 18 mg/L
- 14h → 24 mg/L

Estime a concentração do poluente às 11h usando o método de interpolação de Lagrange.

EXEMPLO EM PHYTON

Exemplo 03: Estimativa de deformação em uma viga

Em um ensaio laboratorial, uma viga de concreto foi submetida a diferentes cargas. As deformações foram registradas da seguinte forma:

- 0 kN → 0 mm
- 5 kN → 0,8 mm
- 10 kN → 1,9 mm

Estime a deformação sob uma carga de 7 kN utilizando a interpolação de Lagrange.

PLANILHA DE ITERAÇÕES

x	y		x (interp)	L0(x)	L1(x)	L2(x)	y0*L0	y1*L1
6	15		10	-0,1111111111	0,8888888889	0,2222222222	-1,666666667	18,66
9	21							
12	27							



EXEMPLO NA ENGENHARIA CIVIL

Contexto:

Na UNIJUÍ (RS), em um projeto, foi aplicado o método de Lagrange para analisar dados de ensaio de compressão simples do concreto com agregado reciclado revistaft.com.br.

Dados Utilizados:

- Traço 1: concreto padrão (0% agregado reciclado)
- Traço 2: 20% agregado reciclado
- Traço 3: 40% agregado reciclado revistaft.com.br

Objetivo:

Construir um polinômio interpolador que represente a curva de resistência à compressão com base nos pontos experimentais de cada traço.

Resultados:

- Foi gerada uma curva confiável para cada traço.
- A precisão aumentou com mais pontos de dados, mostrando que a interpolação de Lagrange se aprimora com mais amostras.

Importância no campo:

- Permite estimar valores intermediários de resistência sem ensaio físico adicional.
- Auxilia no planejamento e na tomada de decisões sobre proporções de agregado reciclado.
- Demonstra a utilidade de métodos numéricos na análise de materiais de engenharia.



EXEMPLO NA EAS

Aplicações relevantes:

- **Monitoramento ambiental** – Estimativa de variáveis ambientais em locais não monitorados, como qualidade da água e do ar.
- **Modelagem climática** – Análise de séries temporais para prever padrões climáticos e suas variações.
- **Gestão de recursos hídricos** – previsão de vazões e níveis de reservatórios em pontos não medidos diretamente



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício 1)

Considere os pontos: (1,2), (2,3), (4,1)

Encontre o polinômio interpolador de Lagrange $P(x)$

A fórmula do polinômio interpolador de Lagrange é: $P(x) = y_i \cdot L_i(x)$

Passo 1: Definir os pontos

$$X_0 = 1, Y_0 = 2$$

$$X_1 = 2, Y_1 = 3$$

$$X_2 = 4, Y_2 = 1$$

Passo 2: Calcular os termos $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$

$$L_0(x) = (x-2)(x-4)/(1-2)(2-4) = (x-2)(x-4)/3$$

$$L_1(x) = (x-1)(x-4)/(2-1)(2-4) = -(x-1)(x-4)/2$$

$$L_2(x) = (x-1)(x-2)/(4-1)(4-2) = (x-1)(x-2)/6$$



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Passo 3: Montar o polinômio

$$P(x) = 2.L0(x) + 3.L1(x) + 1.L2(x)$$

$$P(x) = 2.(x-2)(x-4)/3 - 3.(x-1)(x-4)/2 + (x-1)(x-2)/6$$

*Expandir o polinômio

$$P(x) = -4x^2 + 18x - 2/6$$

$$P(x) = -2/3.x^2 + 3x - 1/3$$



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício 2)

Considere os pontos: (0,1), (1,3), (2,2)

Use o polinômio de Lagrange para estimar $f(1.5)$

A fórmula do polinômio interpolador de Lagrange é: $P(x) = y_i \cdot L_i(x)$

Passo 1: Definir os pontos

$$X_0 = 0, Y_0 = 1$$

$$X_1 = 1, Y_1 = 3$$

$$X_2 = 2, Y_2 = 2$$

Passo 2: Calcular os termos $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$

$$L_0(x) = (x-1)(x-2)/(0-1)(0-2) = (x-1)(x-2)/2$$

$$L_1(x) = (x-0)(x-2)/(1-0)(1-2) = x(x-2)/-1$$

$$L_2(x) = (x-0)(x-1)/(2-0)(2-1) = x(x-1)/2$$



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Passo 3: Montar o polinômio

$$P(x) = 1.L0(x) + 3.L1(x) + 2.L2(x)$$

$$P(x) = (x-1)(x-2)/2 - 3x(x-2) + x(x-1)$$

*Substituindo x por 1,5

$$P(1,5) = 1.(-0,125) + 3. (0,75) + 2.(0,375)$$

$$P(1,5) = -0,125 + 2,25 + 0,75$$

$$P(1,5) = 2,875$$



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício 3)

Considere os pontos: (2,5) e (5,11)

Encontre o polinômio de Lagrange e calcule $f(3)$

A fórmula do polinômio interpolador de Lagrange é: $P(x) = y_i \cdot L_i(x)$

Passo 1: Definir os pontos

$$X_0 = 2, Y_0 = 5$$

$$X_1 = 5, Y_1 = 11$$

Passo 2: Calcular os termos $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$

$$L_0(x) = (x-5)/(2-5) = (x-5)/-3$$

$$L_1(x) = (x-2)/(5-2) = (x-2)/3$$



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Passo 3: Montar o polinômio

$$P(x) = 5.L0(x) + 11.L1(x)$$

$$P(x) = 5.(x-5)/-3 + 11.(x-2)/3$$

$$P(x) = -5x + 25 + 11x - 22/3$$

$$P(x) = 2x + 1$$

*Substituindo x por 3

$$P(3) = 2.3 + 1$$

$$P(3) = 7$$



◆ **OBRIGADO!**