

Exercício 3- Considere os seguintes dados experimentais que relacionam a quantidade de contaminante (mg/L) e o tempo de exposição (horas):

Tempo (h)	Concentração (mg/L)
1	2,1
2	4,3
3	6,1
4	8,0

Use o Método dos Mínimos Quadrados para ajustar uma reta da forma $y = ax + b$ e encontrar os coeficientes a_0 e a_1 .

$$n = 4$$

$$\sum x = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\sum x^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

$$\sum y = 2,1 + 4,3 + 6,1 + 8,0 = 20,5$$

$$\sum xy = 1(2,1) + 2(4,3) + 3(6,1) + 4(8,0) = 61$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20,5 \\ 61 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a_0 + 10a_1 = 20,5 \times (-3) \\ 10a_0 + 30a_1 = 61 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12a_0 - 30a_1 = -61,5 \\ 10a_0 + 30a_1 = 61 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_0 = -0,5 \\ a_0 = 0,25 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4(0,25) + 10a_1 &= 20,5 \\ 1 + 10a_1 &= 20,5 \\ 10a_1 &= 19,5 \\ a_1 &= 1,95 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{y} &= 0,25 + 1,95x \\ a_0 &= 0,25 \\ a_1 &= 1,95 \end{aligned}$$

Exercício 2- Utilize a equação do exercício anterior e calcule os valores ajustados \hat{y} e os resíduos para cada tempo. Monte a tabela

Tempo (h)	y	\hat{y}	Resíduo = $y - \hat{y}$
-----------	---	-----------	-------------------------

$$y = 0,25 + 1,95x$$

$$\hat{y}_1 = 0,25 + 1,95(1) = 2,2$$

$$\hat{y}_2 = 0,25 + 1,95(2) = 4,15$$

$$\hat{y}_3 = 0,25 + 1,95(3) = 6,1$$

$$\hat{y}_4 = 0,25 + 1,95(4) = 8,05$$

$$\text{Resíduo} = y - \hat{y}$$

$$R_1 = 2,1 - 2,2 = -0,1$$

$$R_2 = 4,3 - 4,15 = 0,15$$

$$R_3 = 6,1 - 6,1 = 0$$

$$R_4 = 8,0 - 8,05 = -0,05$$

Tempo (h)	y	\hat{y}	Resíduo
1	2,1	2,2	-0,1
2	4,3	4,15	+0,15
3	6,1	6,1	0
4	8,0	8,05	-0,05

Exercício 8- A concentração de Fósforo residual em uma amostra de efluentes industrial foi medida para diferentes dosagens de coagulante

Dosagem (mg/L)	Concentração (mg/L)
1	8,0
2	5,5
3	4,2
4	4,0
5	4,5

Encontre o polinômio de grau 2 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ que melhor se ajusta aos dados.

$$n = 5$$

$$\sum x^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225$$

$$\sum x = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum x^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 = 979$$

$$\sum x^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

$$\sum y = 8,0 + 5,5 + 4,2 + 4,0 + 4,5 = 26,2$$

$$\sum xy = 1(8,0) + 2(5,5) + 3(4,2) + 4(4,0) + 5(4,5) = 70,1$$

$$\sum x^2y = 1^2(8) + 2^2(5,5) + 3^2(4,2) + 4^2(4,0) + 5^2(4,5) = 244,3$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x & \sum x^2 \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \\ \sum x^2y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26,2 \\ 70,1 \\ 244,3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a_0 + 15a_1 + 55a_2 = 26,2 \\ 15a_0 + 55a_1 + 225a_2 = 70,1 \\ 55a_0 + 225a_1 + 979a_2 = 244,3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 15 & 55 & 26,2 \\ 15 & 55 & 225 & 70,1 \\ 55 & 225 & 979 & 244,3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times -3 & \times -11 \\ \downarrow + & \downarrow + \end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 15 & 55 & 26,2 \\ 0 & 10 & 60 & -8,5 \\ 0 & 60 & 374 & -43,9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times (-6) \\ \downarrow + \end{matrix}} \begin{bmatrix} 5 & 15 & 55 & 26,2 \\ 0 & 10 & 60 & -8,5 \\ 0 & 0 & 34 & 7,1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5a_0 + 15a_1 + 55a_2 = 26,2 \\ 10a_1 + 60a_2 = -8,5 \\ 34a_2 = 7,1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{7,1}{34} \Rightarrow a_2 = 0,507 \quad 10a_1 + 60(0,507) = -8,5 \quad 5a_0 + 15(-3,892) + 55(0,507) = 26,2$$

$$a_1 = -3,892 \quad a_0 = -0,859$$

$$y = -0,859 - 3,892x + 0,507x^2$$

$$a_0 = -0,859$$

$$a_1 = -3,892$$

$$a_2 = 0,507$$