

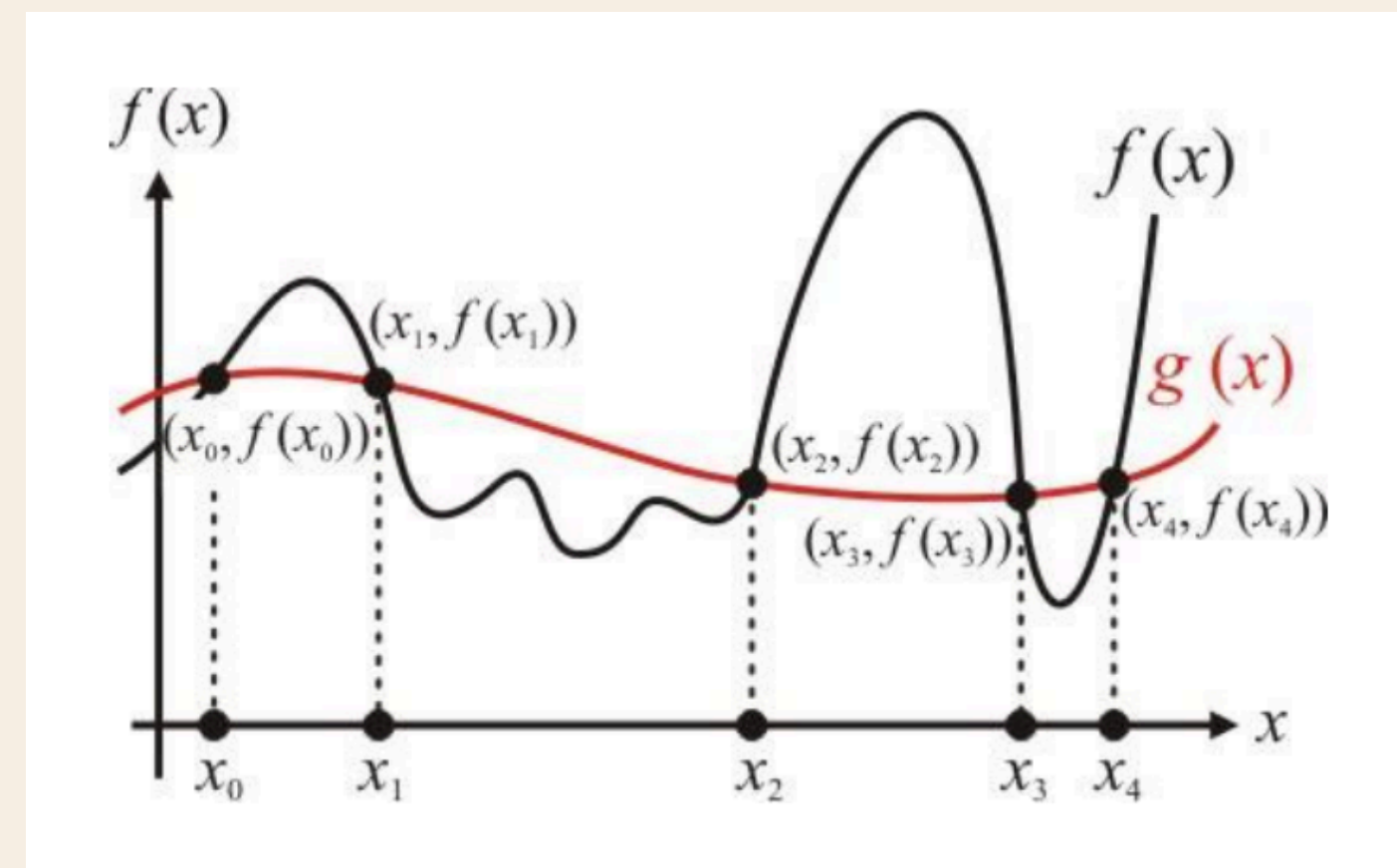
INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE

LARA CRISTINI RODRIGUES CANDIDO
NATHALIA GONÇALVES RIBEIRO



INTERPOLAÇÃO

Consiste em determinar uma função $g(x)$ que descreve de forma aproximada o comportamento de outra função $f(x)$ que não se conhece. São conhecidos alguns valores tabelados do tipo $(x, f(x))$.



INTERPOLAÇÃO - TÉCNICAS

A classe de funções escolhida para a interpolação é a priori arbitrária, e deve ser adequada às características que pretendemos que a função possua.

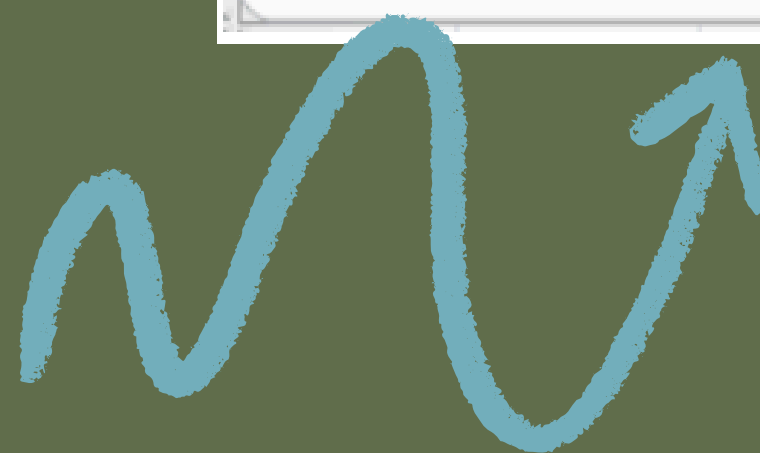
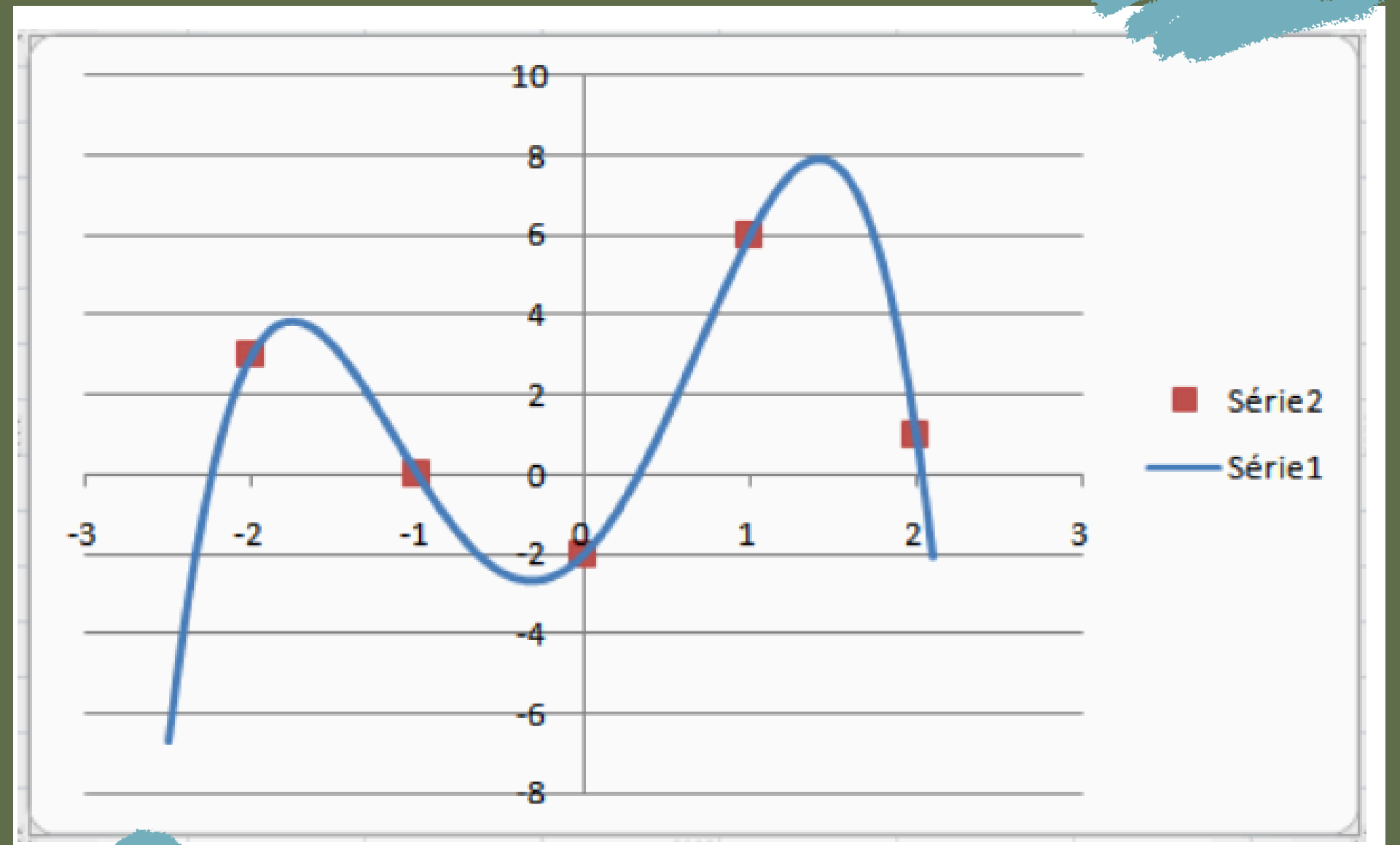
A interpolação é executada usando funções aproximadas, tais como:

1. Funções trigonométricas
2. Funções exponenciais
3. Série de Fourier
4. Wavelets
5. Splines
6. Polinômios – Interpolação Polinomial



INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

A interpolação polinomial consiste em determinar um polinômio, que assume valores conhecidos nos nós de interpolação.



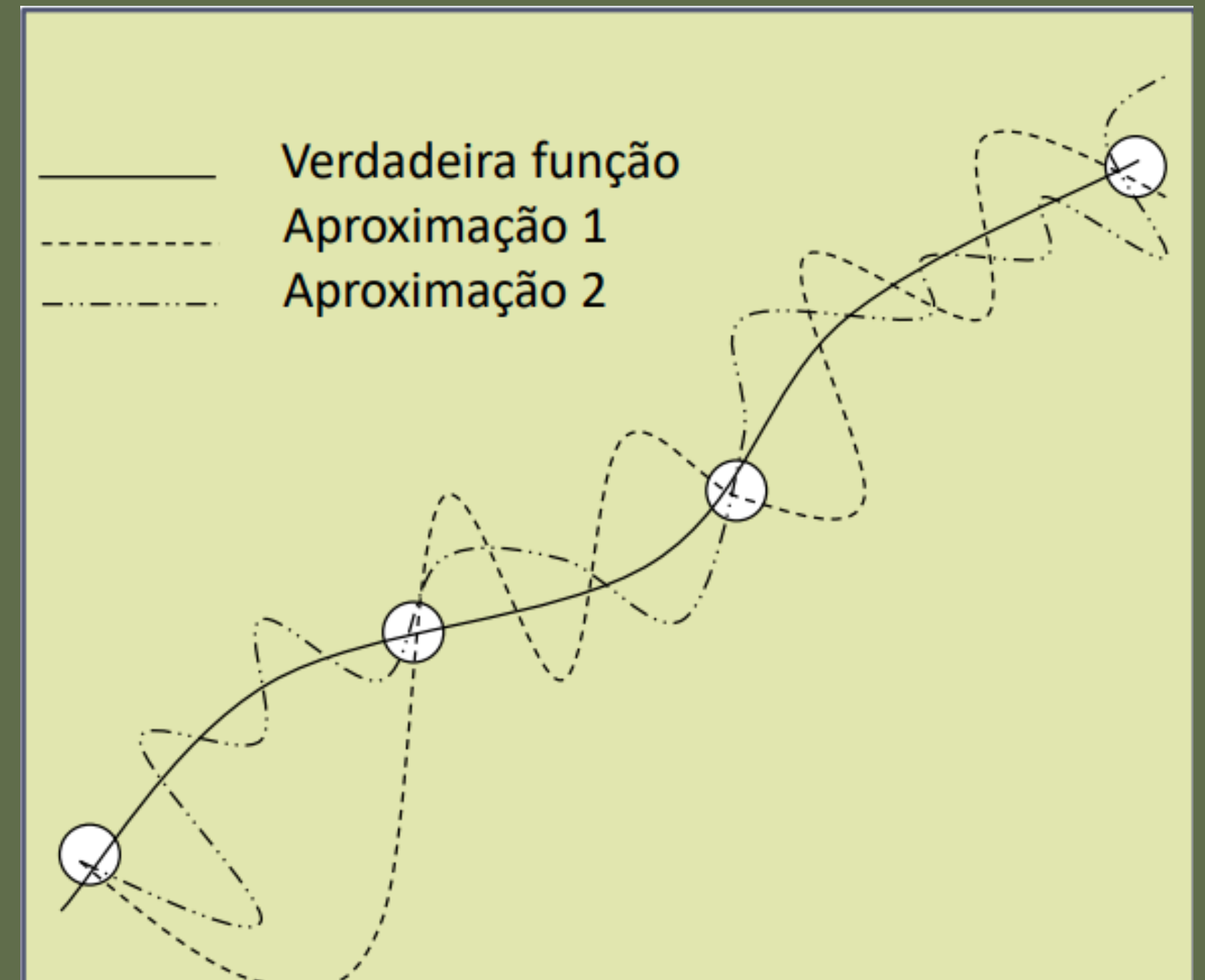
INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL



- Polinômios satisfazem o teorema de unicidade: um polinômio de grau menor ou igual a n passando exatamente por $n + 1$ pontos é único.
- O polinômio ajustado a um conjunto específico de pontos pode assumir diferentes formas, mas todas as formas são equivalentes.
- Qualquer forma pode ser transformada em outra através de simples rearranjo algébrico.

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

- O polinômio estimado (aproximado a partir da interpolação polinomial) deve passar por todos os pontos conhecidos.
- Nos pontos intermediários deverá passar próximo.



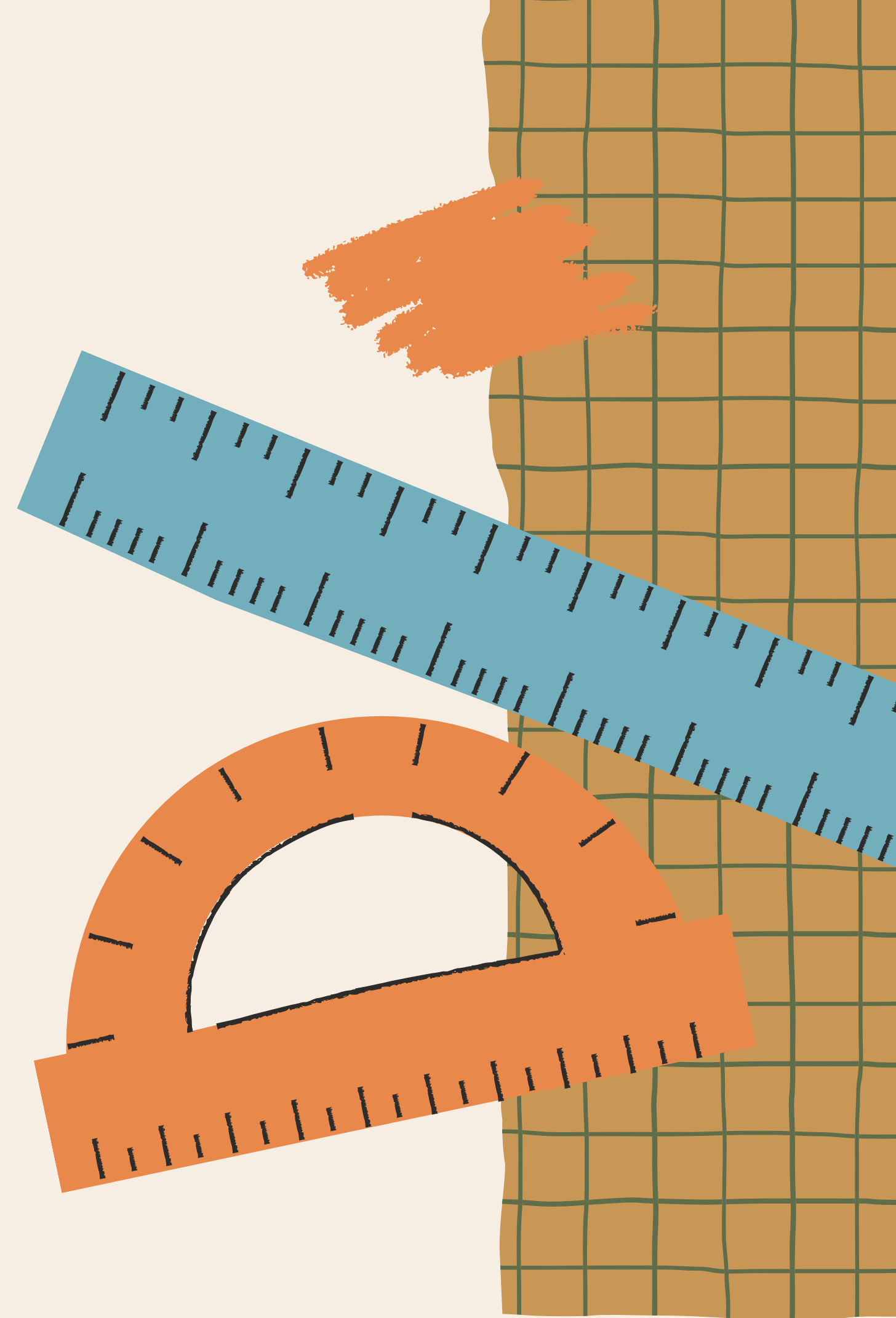
INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL - VANTAGENS

Polinômios são a escolha mais comum de interpolação porque eles são fáceis de:

Avaliar;
Diferenciar;
Integrar.

INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE

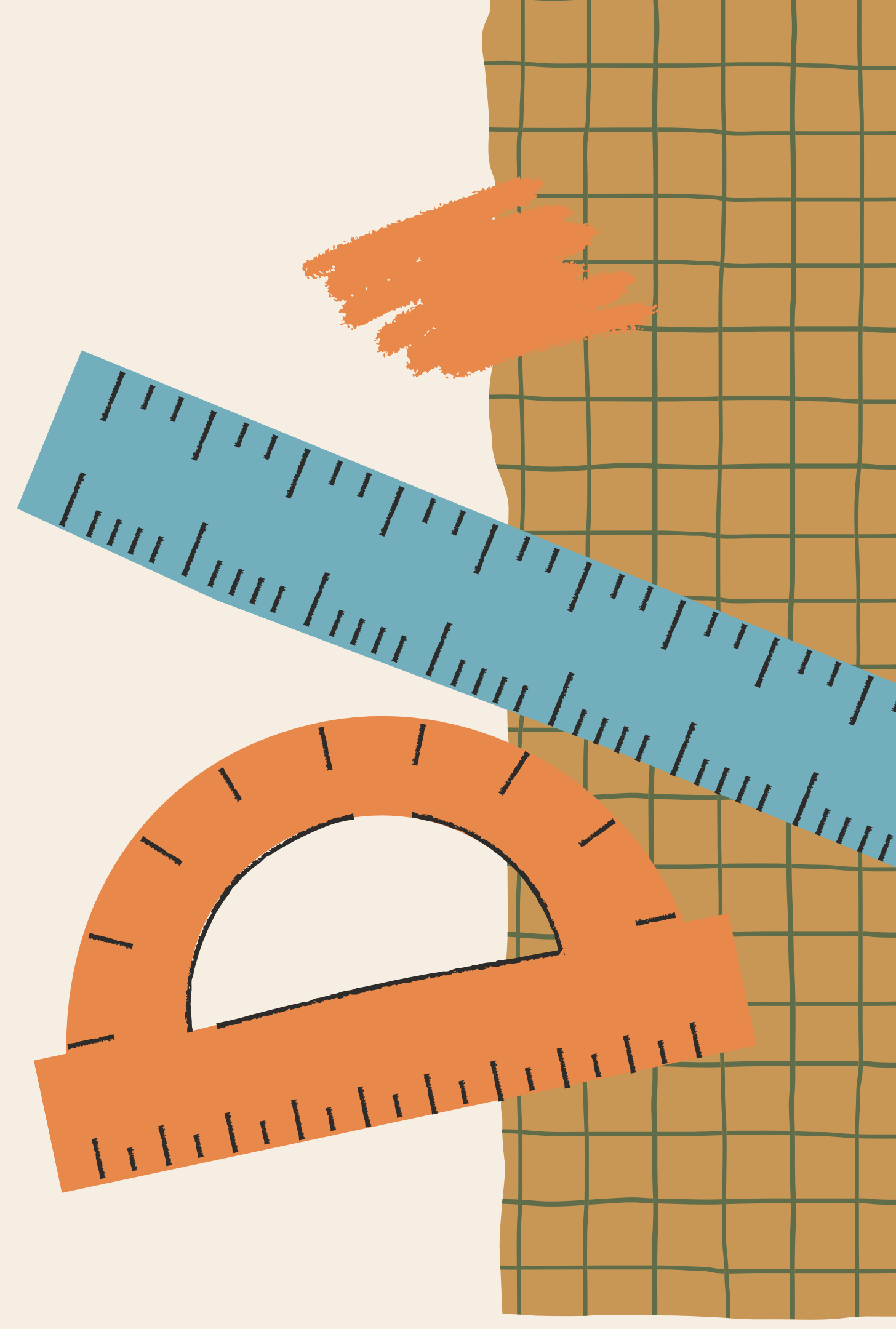
A interpolação de Lagrange é um método numérico utilizado para encontrar um polinômio que passa exatamente por um conjunto de pontos conhecidos. Esse polinômio é chamado de polinômio interpolador de Lagrange.



INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE

É usado em diversas áreas da ciência e engenharia, principalmente em situações onde é necessário estimar valores desconhecidos com base em dados discretos conhecidos.

O método de interpolação de Lagrange é importante porque permite representar funções desconhecidas a partir de pontos dados, sendo essencial para modelagem de dados, simulações e estudos numéricos.



INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE - FORMA GERAL

Seja um conjunto de $n + 1$ pontos $\{x_i, f(x_i)\}$. Encontrar um polinômio interpolador $p_n(x)$ que satisfaça a Equação (1), isto é, passe por todos os pontos.

A forma geral para $n + 1$ pontos é

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$p_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + \dots + L_n(x)f(x_n)$$



EXEMPLO 1

Usando o método de Lagrange, encontre o polinômio interpolador que passa pelos quatro pontos da tabela abaixo:

x	1,3	1,8	2,6	3,9
y	3,2	4,3	0,5	-1,7

Substituindo os valores, teremos

$$L_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$L_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$L_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$L_3 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$P_3(x) = y_0L_0 + y_1L_1 + y_2L_2 + y_3L_3$$

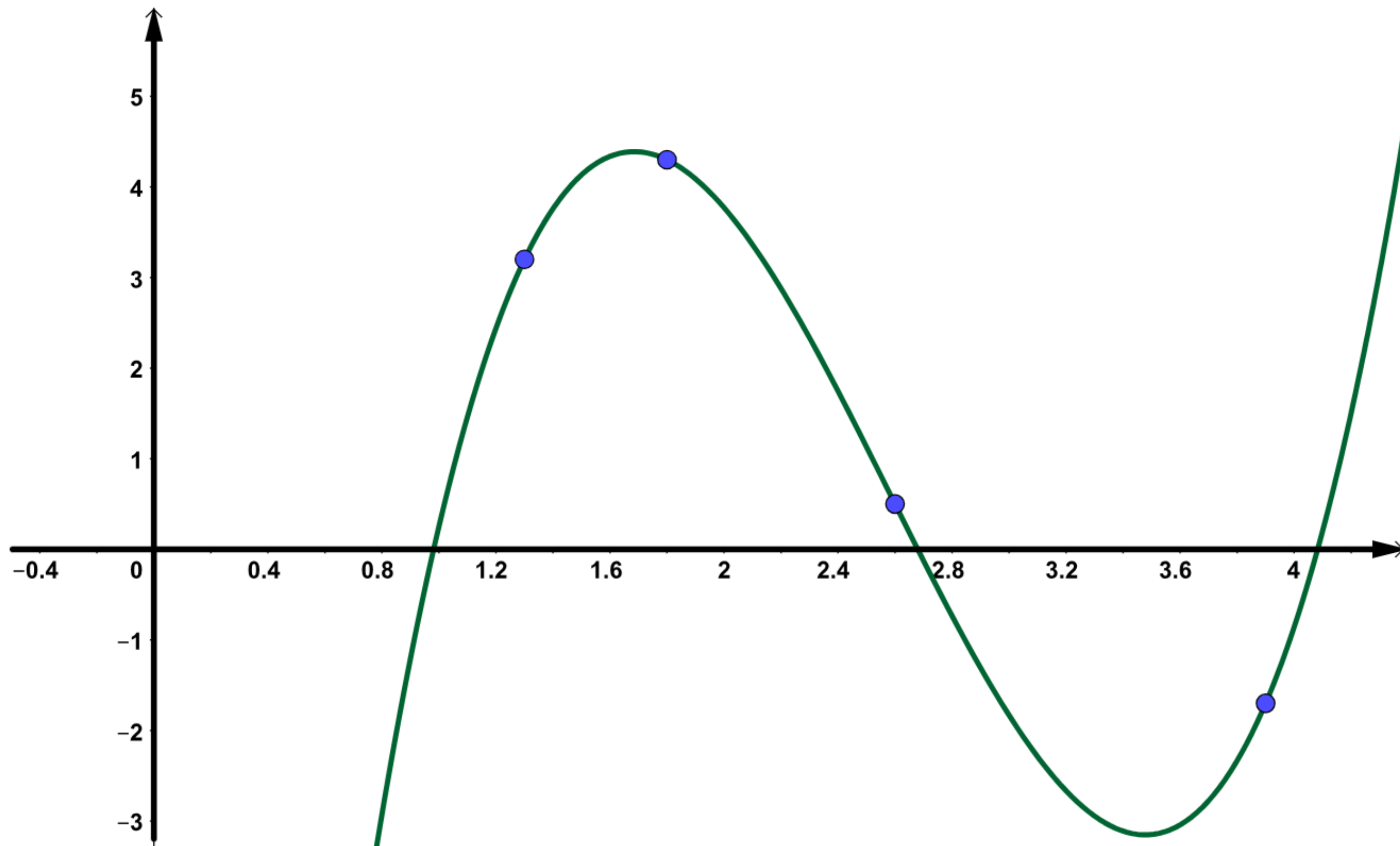
$$L_0 = \frac{(x - 1.8)(x - 2.6)(x - 3.9)}{(1.3 - 1.8)(1.3 - 2.6)(1.3 - 3.9)}$$

$$L_1 = \frac{(x - 1.3)(x - 2.6)(x - 3.9)}{(1.8 - 1.3)(1.8 - 2.6)(1.8 - 3.9)}$$

$$L_2 = \frac{(x - 1.3)(x - 1.8)(x - 3.9)}{(2.6 - 1.3)(2.6 - 1.8)(2.6 - 3.9)}$$

$$L_3 = \frac{(x - 1.3)(x - 1.8)(x - 2.6)}{(3.9 - 1.3)(3.9 - 1.8)(3.9 - 2.6)}$$

$$P_3(x) = 3.2L_0 + 4.3L_1 + 0.5L_2 + (-1.7)L_3$$





EXEMPLO 2

Considere os pontos da tabela e encontre o melhor polinômio de Lagrange de segundo grau para estimar (interpolar) $f(4.5)$:

x	1	2	3,5	5	7
y	0,00	0,6931	1.2528	1.6094	1.9459



Como iremos fazer uma interpolação para encontrar um polinômio de grau 2, devemos escolher $n+1$ pontos. Sendo $n=2$ (grau do polinômio), devemos escolher os 3 melhores pontos para calcular $f(4.5)$.

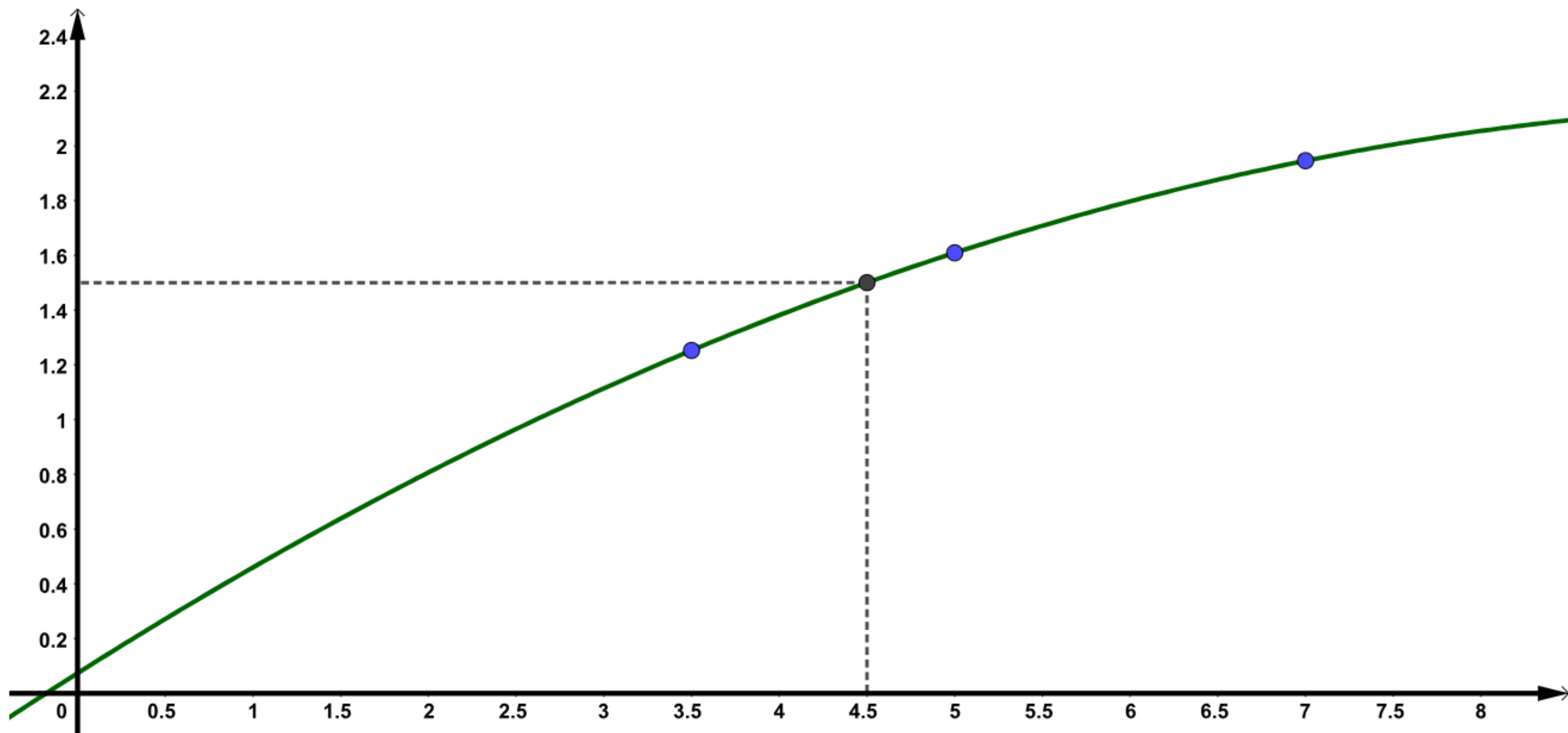
x	1	2	3,5	5	7
y	0,00	0,6931	1.2528	1.6094	1.9459

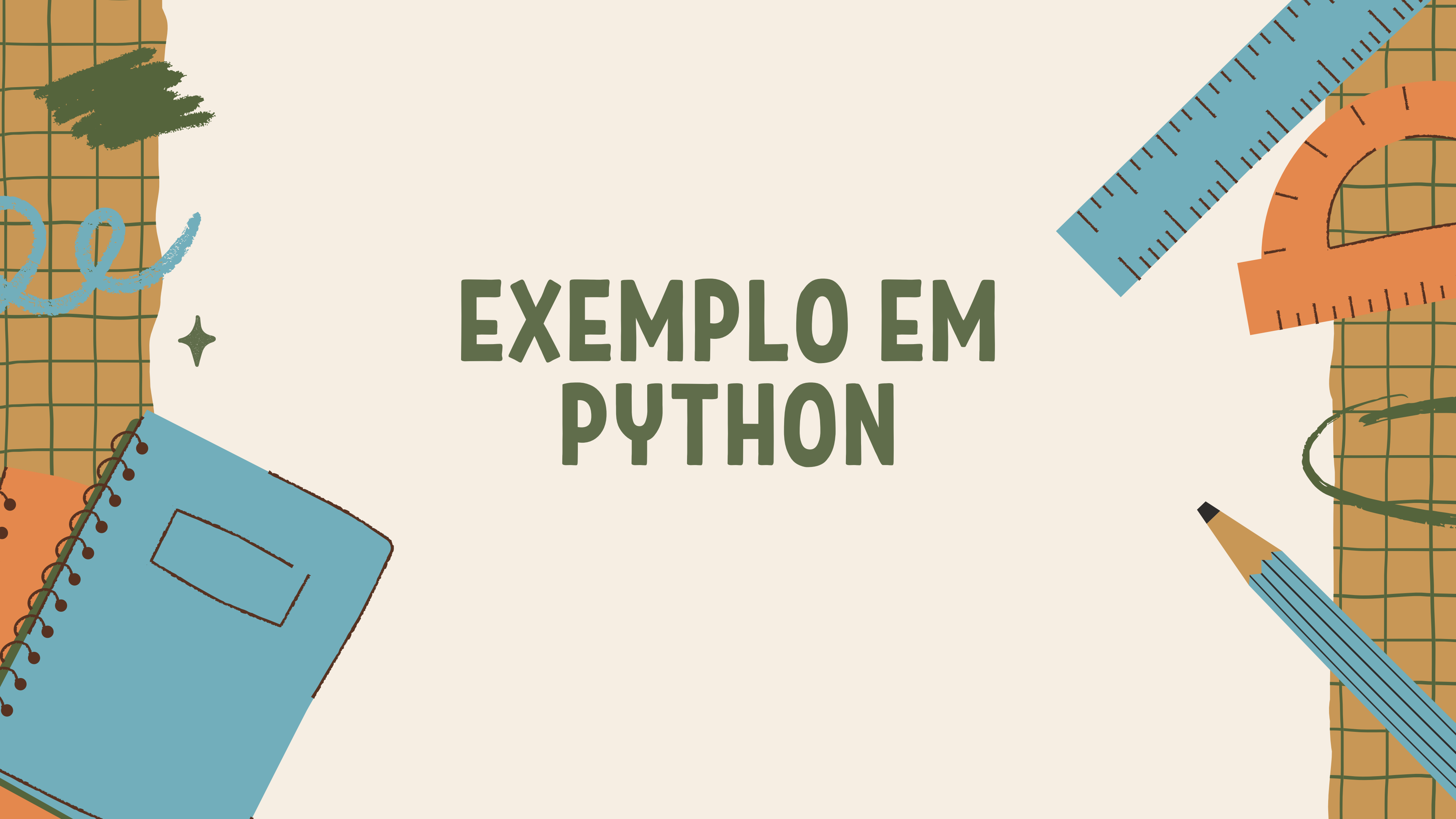
$$L_0 = \frac{(x - 5)(x - 7)}{(3.5 - 5)(3.5 - 7)},$$

$$L_1 = \frac{(x - 3.5)(x - 7)}{(5 - 3.5)(5 - 7)},$$

$$L_2 = \frac{(x - 3.5)(x - 5)}{(7 - 3.5)(7 - 5)},$$

$$P_2(x) = (1.2528)L_0 + (1.6094)L_1 + (1.9459)L_2.$$




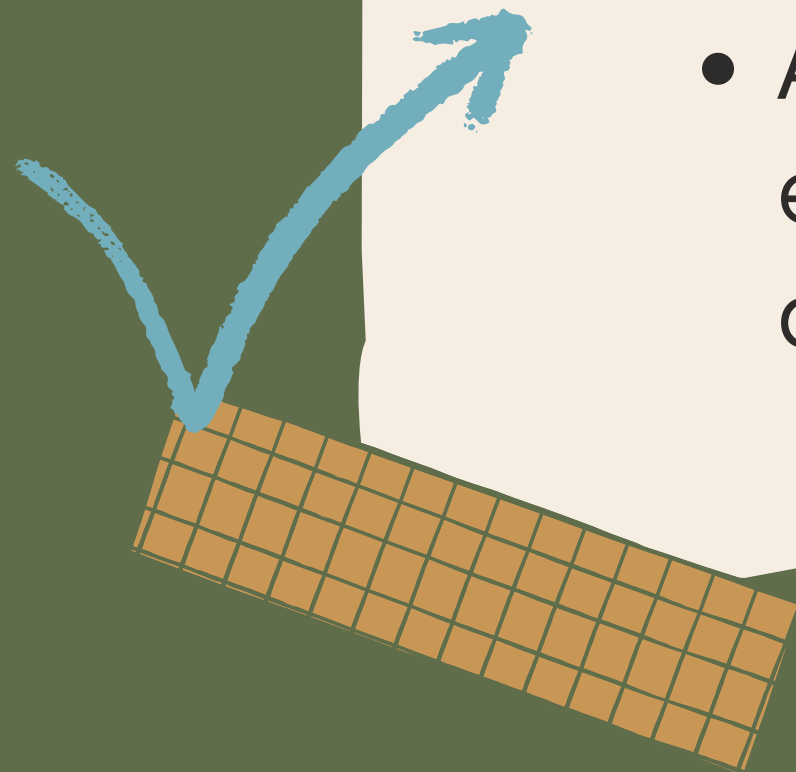
The background features a light beige color with a brown grid pattern on the left and right sides. On the left, there is a blue spiral notebook, a blue ruler, and a green pencil. On the right, there is an orange protractor and a blue ruler. A green star is located near the top left, and a green squiggle is near the bottom right.

EXEMPLO EM PYTHON

VANTAGENS




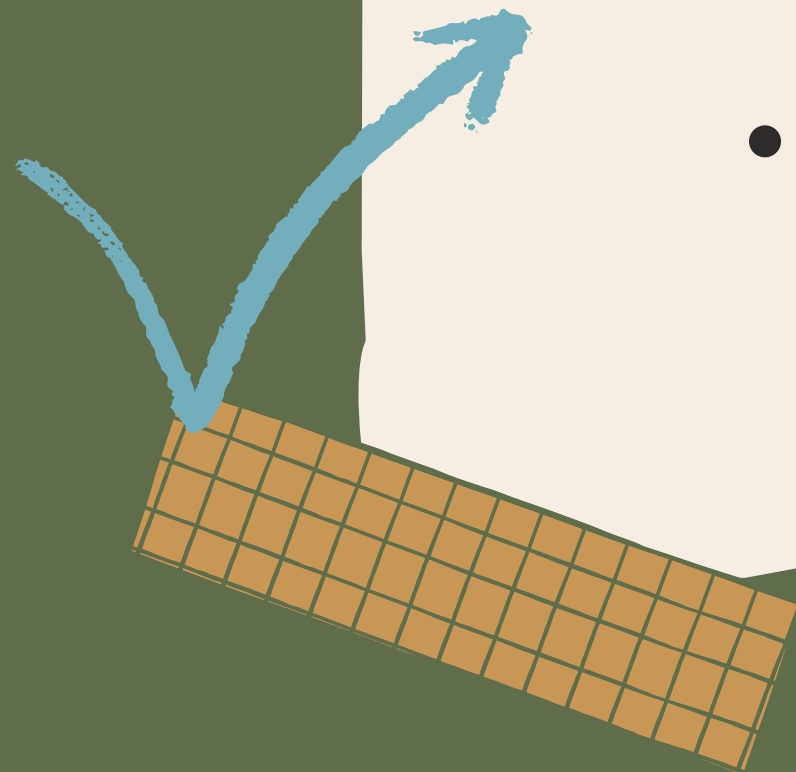
- 
- A fórmula de Lagrange é popular, pois é bem conhecida e é fácil de codificar.
 - Além disso, os dados não são obrigados a ser especificado com x em ordem crescente ou decrescente.



DESVANTAGENS



- 
- Embora o cálculo de $p_n(x)$ é simples, o método ainda não é eficiente para grandes valores de n .
 - A interpolação polinomial de ordem alta é instável!



REFERÊNCIA

EUGÊNIO, V.; PROFESSORA, W.; KLEINA, M. Métodos Numéricos Interpolação -Métodos de Lagrange. [s.l: s.n.]. Disponível em: <https://docs.ufpr.br/~volmir/MN_11_interpolacao_lagrange_ppt.pdf>. Acesso em: 7 dez. 2023.

Interpolação - Lagrange. Disponível em: <<https://cn.ect.ufrn.br/index.php?r=conteudo%2Finterp-lagrange>>.

