

# Regressão por Mínimos Quadrados

Guilherme Stevani e Jamilly Silva

05 de junho de 2025

Introdução

Interpolação vs.  
Ajuste

Ajuste Linear e  
Polinomial

Equações Normais  
e Matriz de  
Coeficientes

Aplicação Prática

Conclusão

# O que é Regressão por Mínimos Quadrados?

Regressão por  
Mínimos  
Quadrados

Guilherme Stevani  
e Jamilly Silva

Introdução

Interpolação vs.  
Ajuste

Ajuste Linear e  
Polinomial

Equações Normais  
e Matriz de  
Coeficientes

Aplicação Prática

Conclusão

- ▶ É uma técnica de otimização utilizada para encontrar a melhor reta(ou curva) que se ajusta a um conjunto de dados.
- ▶ Minimiza a soma dos quadrados dos resíduos(as diferenças verticais entre os pontos de dados e a linha de ajuste).
- ▶ Fundamental em diversas áreas, como engenharia, economia e ciência de dados.

# Interpolação vs. Ajuste

## Interpolação

- ▶ A curva(ou função) passa por todos os pontos de dados.
- ▶ Geralmente usada quando os dados são exatos e precisos.
- ▶ Exemplos: Interpolação polinomial, spline cúbica.
- ▶ Pode levar a comportamentos erráticos entre os pontos (fenômeno de Runge).

## Ajuste (Regressão)

- ▶ A curva aproxima os pontos de dados, mas não necessariamente passa por todos eles.
- ▶ Usada quando os dados contêm ruído ou erros.
- ▶ Objetivo: encontrar a tendência geral dos dados.
- ▶ Mínimos Quadrados é uma técnica de ajuste.

# Equações Normais e Matriz de Coeficientes

Regressão por  
Mínimos  
Quadrados

Guilherme Stevani  
e Jamilly Silva

Introdução

Interpolação vs.  
Ajuste

Ajuste Linear e  
Polinomial

Equações Normais  
e Matriz de  
Coeficientes

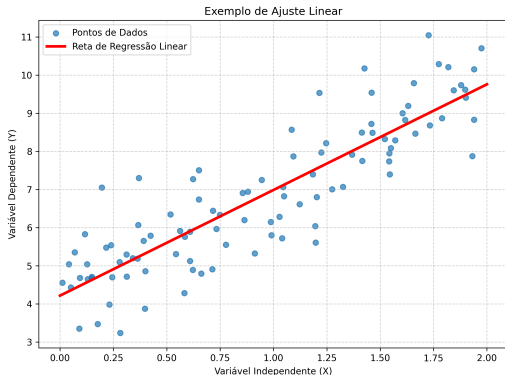
Aplicação Prática

Conclusão

- ▶ São a base matemática para encontrar os coeficientes da reta ou curva de ajuste.
- ▶ O objetivo é minimizar a soma dos quadrados dos resíduos.
- ▶ Isso é feito através de derivadas parciais da função de erro em relação a cada coeficiente, igualando-as a zero.
- ▶ O resultado é um sistema de equações lineares (as Equações Normais).
- ▶ Em sua forma mais geral, esse sistema pode ser expresso em termos de matrizes, facilitando a resolução computacional.
- ▶ A matriz principal desse sistema é conhecida como Matriz dos Coeficientes ( $X^T X$ ).

# Ajuste Linear Simples

- ▶ A forma mais básica de regressão.
- ▶ O objetivo é ajustar uma reta aos dados:  $y = ax + b$ .
- ▶ Onde  $a$  é o coeficiente angular e  $b$  é o coeficiente linear.
- ▶ Minimiza  $\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$ .

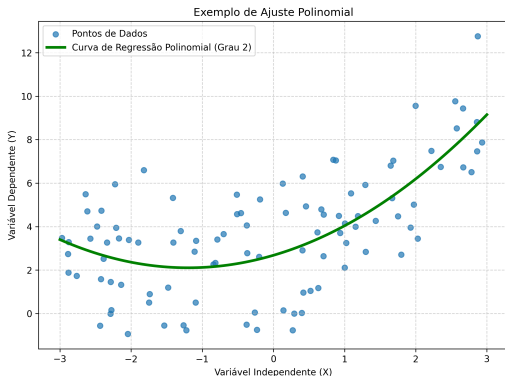


# Ajuste Polinomial

- ▶ Utiliza um polinômio para ajustar os dados.
- ▶ A equação geral para um polinômio de grau  $m$  é:

$$y = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0$$

- ▶ Minimiza  $\sum_{i=1}^n (y_i - P(x_i))^2$ , onde  $P(x_i)$  é o valor do polinômio em  $x_i$ .
- ▶ Permite modelar relações não-lineares.



# Derivação das Equações Normais (Caso Linear)

- ▶ Para o ajuste linear  $y = ax + b$ , minimizamos a função de erro:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$

- ▶ Derivamos  $S(a, b)$  em relação a  $a$  e  $b$  e igualamos a zero para encontrar os mínimos:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - ax_i - b) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0$$

- ▶ Isso nos leva a um sistema de duas equações lineares (Equações Normais).

# Equações Normais (Forma Matricial)

- ▶ Para um ajuste polinomial de grau  $m$ , o sistema de equações normais pode ser expresso matricialmente.
- ▶ Considere o sistema  $Y = X\beta + \epsilon$ , onde:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

- ▶ A solução para  $\beta$  (os coeficientes) é dada por:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

- ▶ Onde  $X^T X$  é a matriz dos coeficientes e  $(X^T X)^{-1}$  é a sua inversa.



# Exemplo Prático: Previsão de Preços de Imóveis

Regressão por  
Mínimos  
Quadrados

Guilherme Stevani  
e Jamilly Silva

- ▶ Problema: Prever o preço de um imóvel com base em características como área, número de quartos, localização, etc.
- ▶ Dados: Coletar dados históricos de imóveis (preço, área, etc.).
- ▶ Aplicação:
  1. Utilizar Regressão Linear Múltipla (uma extensão dos Mínimos Quadrados).
  2. Ajustar um modelo aos dados.
  3. Os coeficientes do modelo indicam a influência de cada característica no preço.
- ▶ Benefícios: Ajuda a precificar imóveis, identificar fatores de valor e auxiliar compradores e vendedores.

Introdução

Interpolação vs.  
Ajuste

Ajuste Linear e  
Polinomial

Equações Normais  
e Matriz de  
Coeficientes

Aplicação Prática

Conclusão

# Outras Aplicações da Regressão por Mínimos Quadrados

Regressão por  
Mínimos  
Quadrados

Guilherme Stevani  
e Jamilly Silva

Introdução

Interpolação vs.  
Ajuste

Ajuste Linear e  
Polinomial

Equações Normais  
e Matriz de  
Coeficientes

Aplicação Prática

Conclusão

- ▶ Engenharia: Calibrar sensores, modelar o comportamento de materiais.
- ▶ Economia: Prever vendas, analisar tendências de mercado.
- ▶ Finanças: Prever o valor de ações, modelar risco.
- ▶ Ciência de Dados/Machine Learning: Base para muitos algoritmos de aprendizado supervisionado.
- ▶ Biologia: Modelar o crescimento populacional, analisar a resposta a tratamentos.

- ▶ A Regressão por Mínimos Quadrados é uma ferramenta poderosa para modelar relações entre variáveis.
- ▶ Essencial para entender tendências e fazer previsões a partir de dados com ruído.
- ▶ Sua formulação matemática via equações normais e matriz dos coeficientes fornece uma solução analítica robusta.
- ▶ Ampla aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento.

# Perguntas?

Regressão por  
Mínimos  
Quadrados

Guilherme Stevani  
e Jamilly Silva

Introdução

Interpolação vs.  
Ajuste

Ajuste Linear e  
Polinomial

Equações Normais  
e Matriz de  
Coeficientes

Aplicação Prática

Conclusão

Obrigado pela atenção!