Cálculo Numérico

Um guia prático com Python

Prof. Dr. Rogério Vargas[1]

[1]Centro de Estudos do Mar
Universidade Federal do Paraná

2025

rogerio.in

UFPR

Encontro 21: Equações Diferenciais Ordinárias

Introdução às EDOs

- Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) descrevem a evolução de variáveis no tempo ou em outra variável independente.
- Surgem naturalmente em diversas áreas: física, engenharia, biologia, economia, etc.
- Soluções analíticas nem sempre são possíveis; por isso, usamos métodos numéricos.

Revisão: o que é uma derivada?

- A derivada representa a taxa de variação de uma função.
- Geometricamente, é a inclinação da reta tangente à curva da função.
- Se $y(t)$ representa uma grandeza que muda com o tempo:
  - $\frac{dy}{dt} > 0$: crescimento.
  - $\frac{dy}{dt} < 0$: decaimento.
- Em EDOs, usamos $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ como base para os métodos numéricos.

Exercícios

Para recordar, resolva:

1. $f(x) = e^{2x}$
2. $g(x) = sin(2x)$

Exemplo de derivada: $f(x) = e^{2x}$

Passo a passo:

- Identificamos que
  $f(x) = e^{2x}$
  é uma função composta.
- Regra da cadeia:
  $\frac{d}{dx}(e^{u(x)}) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$
- Parte interna:
  $u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = 2$
- Resultado final:

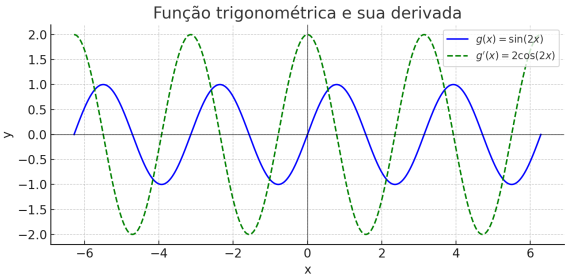
$$f'(x) = 2e^{2x}$$

Exemplo de derivada: $g(x) = \sin(2x)$

Passo a passo:

- A função é composta: $g(x) = \sin(u(x))$, com $u(x) = 2x$
- Regra da cadeia: $\frac{d}{dx}[\sin(u)] = \cos(u) \cdot u'(x)$
- Derivada da parte interna: $u'(x) = 2$
- Resultado final:

$$g'(x) = 2\cos(2x)$$



Motivação: Por que estudar EDOs?

- Modelam fenômenos naturais e de engenharia.
- Permitem simulações em tempo contínuo.
- São base para modelagem em:
    - Física: Movimento, calor.
    - Biologia: Crescimento populacional, epidemias.
    - Engenharia: Oscilações, circuitos.
    - Economia: Modelos dinâmicos.

O que é uma EDO?

Equação Diferencial Ordinária:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

Solução: função $y(t)$ que satisfaz a equação e uma condição inicial:

$$y(t_0) = y_0$$

Problema de Valor Inicial (PVI)

- Um PVI consiste em:
  - Uma EDO de primeira ordem: $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$
  - Uma condição inicial: $y(t_0) = y_0$
- O objetivo é encontrar uma função $y(t)$ que satisfaça a equação e a condição inicial num intervalo ao redor de t_0.
- Ponto de partida para os métodos numéricos.

Exemplo de PVI: encontrar constante k

Enunciado:

- Seja $y(t) = -e^{-t-k} + 2$
- Encontre o valor de k tal que $y(0) = 0$

Exemplo de PVI: encontrar constante k

Enunciado:

- Seja $y(t) = -e^{-t-k} + 2$
- Encontre o valor de k tal que $y(0) = 0$

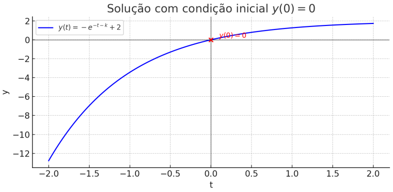
Passo a passo:

- Substituir $t = 0$ na equação:

$$0 = -e^{-0-k} + 2$$

- Reorganizar:

$$e^{-k} = 2 \Rightarrow -k = \ln(2) \Rightarrow k = -\ln(2)$$



Resposta final:

$$k = -\ln(2)$$

Exemplo: EDO na Engenharia Civil

Vibração de uma viga ou estrutura (modelo massa-mola):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

- $x(t)$: deslocamento da estrutura ao longo do tempo.
- m: massa, c: amortecimento, k: rigidez.
- Modela o comportamento dinâmico de estruturas submetidas a cargas variáveis.

Exemplo: EDO na Engenharia Ambiental

Modelagem da concentração de poluente em um rio:

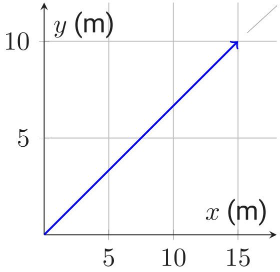
$$\frac{dC}{dt} = -kC$$

- $C(t)$: concentração do poluente ao longo do tempo.
- k: taxa de decaimento (degradação natural ou por tratamento).
- Útil para prever a dispersão e o tempo de desaparecimento de substâncias no ambiente.

Exemplo aplicado: EDO para simular o movimento de um drone

Contexto:

- Um drone parte da posição inicial $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
- Ele se move com velocidade constante: $\vec{v}(t) = (3, 2)$ m/s
- Desejamos determinar sua posição após t segundos.



Passo a passo

- **Passo 1:** A equação diferencial do drone é:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (3, 2)$$

- **Passo 2:** Para obter a posição $\vec{r}(t)$, integramos a velocidade:

$$\vec{r}(t) = \int (3, 2)dt = (\int 3\,dt, \int 2\,dt) = (3t + C_1, 2t + C_2)$$

- **Passo 3:** Aplicamos as condições iniciais: o drone parte de $(0, 0)$

$$\vec{r}(0) = (3 \cdot 0 + C_1,\ 2 \cdot 0 + C_2) = (C_1, C_2) = (0, 0) \Rightarrow C_1 = 0,\ C_2 = 0$$

- **Passo 4:** Substituímos os valores de C_1 e C_2:

$$\vec{r}(t) = (3t, 2t)$$

Exemplo aplicado: EDO para simular o movimento de um drone

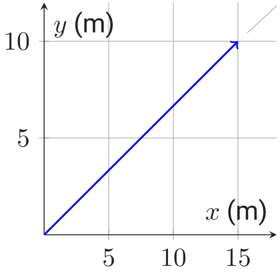
Solução (posição):

$$\vec{r}(t) = (3t, 2t)$$

Exemplo:

- Após 5 segundos: $\vec{r}(5) = (15, 10)$ m

Ver código em Python.



Onde entram os métodos numéricos?

- Algumas EDOs (como a do drone) têm solução analítica simples.
- No entanto, **a maioria das EDOs reais não pode ser resolvida com integrais exatas**.
- Nesse caso, usamos **métodos numéricos** para aproximar a solução:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

- Exemplos de métodos:
  - **Euler:** usa a inclinação atual.
  - **RK2:** usa média de inclinações.
  - **RK4:** usa média ponderada de 4 inclinações.
  - **Preditor-corretor:** estima e corrige a solução.
- São ferramentas essenciais quando não há solução simbólica.

Exemplo de drone com EDO não integrável

- Suponha que o drone seja afetado por vento variável:

$$\frac{dx}{dt} = 3 + \sin(t), \quad \frac{dy}{dt} = 2 + \cos(t)$$

- Neste caso, não há solução elementar para a posição $\vec{r}(t)$.
- Precisamos usar métodos numéricos como Euler ou RK para estimar a trajetória.
- Dado $\vec{r}(0) = (0, 0)$, podemos calcular passo a passo:

$$x_{n+1} = x_n + h(3 + \sin(t_n)), \quad y_{n+1} = y_n + h(2 + \cos(t_n))$$

- Isso simula o deslocamento do drone em ambiente dinâmico (*ver código em Python*).

Por que usar métodos numéricos?

- Muitas EDOs não têm solução analítica.
- Métodos numéricos fornecem aproximações eficientes.
- Aplicáveis a qualquer EDO com função $f(t, y)$ conhecida.
- Essenciais em computação científica.

Método de Euler (método básico)

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

- Simples, porém com baixa precisão.
- Serve como base para métodos mais robustos.

Método de Runge-Kutta (RK4)

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n) \\
k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2\, k_1) \\
k_3 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2\, k_2) \\
k_4 &= f(t_n + h, y_n + h\, k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}
$$

Métodos Preditor-Corretor

- Usam duas etapas:
  - Preditor: estimativa inicial.
  - Corretor: refinamento usando nova derivada.
- Exemplo: Método de Heun.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n^*)]$$

- Muito usados para sistemas complexos.

Erro e estabilidade

- **Erro local:** diferença por passo.
- **Erro global:** acumulado ao longo dos passos.
- **Passo h:** deve ser pequeno o suficiente para precisão, mas grande o bastante para eficiência.
- Estabilidade depende do método e do problema.

Observando o erro global na prática

- Compare a solução numérica com a analítica (se conhecida).
- Varie o passo h e observe o comportamento da solução.
- Utilize ferramentas como o gráfico do erro $|y_{exato} - y_{numrico}|$.
- Explore com software ou sites como o WolframAlpha ou até mesmo o uso com Python.

Usando o WolframAlpha

Dado o PVI

$$\begin{cases} (y^2 - x^2)dx + xydy = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases} \tag{1}$$

Aproxime $y(1,2)$ usando $h = 0,1$.

Dica: Acesse *https://www.wolframalpha.com*, vá em: **All examples** > **Mathematics** > **Applied Mathematics** > **Numerical Analysis** e digite:

use Euler method y' = x/y-y/x, y(1) = 2, from 1 to 1.2, h=0.1

Encaminhamentos para próxima aula

- Aula prática com Python: gráficos
- Próxima quarta: Discutir um interpolador para usarmos em mapas
- Na outra sexta: Mapas poligonos e interpoladores em Python.

Importante!

Este material é exclusivo de uso do autor. Proibido copiar ou replicar.

rogeriovargas@ufpr.br

rogerio.in

UFPR

Cálculo Numérico

Um guia prático com Python

Prof. Dr. Rogério Vargas[1]

[1]Centro de Estudos do Mar
Universidade Federal do Paraná

2025

rogerio.in

UFPR