

Curso de Engenharia Ambiental e Sanitária – UFPR
Professor: Dr. Rogério Vargas

Zero de Funções: Método de Muller

Disciplina: PP015 EAS - Cálculo Numérico - EAS

Ana Beatriz da Silva Tavares
Matheus Mendes dos Santos



Sumário

Introdução ao método numérico

Características do Método de Muller

Fundamentação Teórica

Como escolher os pontos iniciais?

Planilha de Iterações do Método de
Müller

Função em Python

Exemplos na Engenharia Ambiental e
Sanitária

Exemplos na Engenharia Civil

Problemas resolvidos

Conclusão

Introdução ao Método de Muller

O que é o Método de Muller?

É um método iterativo que aproxima raízes de funções por meio de interpolação quadrática, usando três pontos sucessivos e sem exigir derivadas.

Vantagens

- ▶ Aceita raízes complexas;
- ▶ Boa taxa de convergência mesmo sem derivadas;
- ▶ Não requer conhecimento da derivada da função.

Método de Müller

Definição

O método de Müller é um método numérico utilizado para encontrar aproximações das raízes de funções não lineares. Baseia-se na interpolação quadrática de três pontos x_0, x_1, x_2 , e calcula-se uma raiz do polinômio resultante para obter a próxima aproximação. Não exige derivadas e pode encontrar raízes reais ou complexas.

Características do Método de Muller

- ▶ Baseado em interpolação quadrática (usa uma parábola ao invés de uma reta);

Características do Método de Muller

- ▶ Baseado em interpolação quadrática (usa uma parábola ao invés de uma reta);
- ▶ Usa três aproximações iniciais: x_0, x_1, x_2 ;

Características do Método de Muller

- ▶ Baseado em interpolação quadrática (usa uma parábola ao invés de uma reta);
- ▶ Usa três aproximações iniciais: x_0 , x_1 , x_2 ;
- ▶ Não exige cálculo de derivadas, diferente de Newton-Raphson;

Características do Método de Muller

- ▶ Baseado em interpolação quadrática (usa uma parábola ao invés de uma reta);
- ▶ Usa três aproximações iniciais: x_0, x_1, x_2 ;
- ▶ Não exige cálculo de derivadas, diferente de Newton-Raphson;
- ▶ Pode encontrar raízes reais ou complexas;

Características do Método de Muller

- ▶ Baseado em interpolação quadrática (usa uma parábola ao invés de uma reta);
- ▶ Usa três aproximações iniciais: x_0 , x_1 , x_2 ;
- ▶ Não exige cálculo de derivadas, diferente de Newton-Raphson;
- ▶ Pode encontrar raízes reais ou complexas;
- ▶ Convergência superlinear, mais rápida que a da secante;

Características do Método de Muller

- ▶ Baseado em interpolação quadrática (usa uma parábola ao invés de uma reta);
- ▶ Usa três aproximações iniciais: x_0 , x_1 , x_2 ;
- ▶ Não exige cálculo de derivadas, diferente de Newton-Raphson;
- ▶ Pode encontrar raízes reais ou complexas;
- ▶ Convergência superlinear, mais rápida que a da secante;
- ▶ Boa escolha para funções onde a derivada não está disponível ou é dispendiosa.

Fundamentação Teórica

A cada iteração do método de Müller, é construído um **polinômio interpolador quadrático** que passa pelos três pontos x_0, x_1, x_2 .

O polinômio tem a forma:

$$P(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c$$

Onde os coeficientes a , b e c são calculados com base nos valores de $f(x_0)$, $f(x_1)$ e $f(x_2)$.

A nova aproximação é obtida por:

$$x_3 = x_2 - \frac{2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

O sinal deve ser escolhido para maximizar o denominador em módulo.

Fundamentação Teórica (continuação)

Por permitir encontrar raízes complexas e dispensar derivadas, o método de Müller é útil quando métodos tradicionais falham. Sua taxa de convergência é superlinear, garantindo boa eficiência, embora dependa fortemente da escolha dos pontos iniciais.

Como escolher os pontos iniciais?

- ▶ Escolha três pontos x_0 , x_1 e x_2 próximos da raiz esperada.
- ▶ Prefira valores onde a função $f(x)$ esteja mudando de sinal.
- ▶ Se possível, analise o gráfico de $f(x)$ para localizar a região da raiz.
- ▶ Se não souber a raiz, escolha pontos próximos baseados em testes de $f(x)$.
- ▶ Pontos muito distantes podem dificultar a convergência.

Não tenho o gráfico, e agora?

- ▶ Teste rapidamente $f(x)$ para valores simples (como $x = -2, 0, 1, 2, 3$).
- ▶ Procure onde $f(x)$ muda de sinal: $f(x_a) \times f(x_b) < 0$.
- ▶ Escolha três pontos próximos ao intervalo detectado.
- ▶ Exemplo: se $f(0) > 0$ e $f(1) < 0$, escolha $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 1$.

Planilha de Iterações do Método de Müller

Função: $f(x) = x^3 - 9x + 3$						
Iteração	x_0	x_1	x_2	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$
1	1.0000	1.5000	2.0000	-5.0000	-7.1250	-7.0000
2	1.5000	2.0000	3.0000	-7.1250	-7.0000	3.0000
3	2.0000	3.0000	2.8029	-7.0000	3.0000	0.2276
4	3.0000	2.8029	2.8168	3.0000	0.2276	-0.0051
5	2.8029	2.8168	2.8169	0.2276	-0.0051	0.0000

Iteração	x_3 (Nova Aproximação)	Erro Relativo
1	3.0000	1.000000
2	2.8029	0.197126
3	2.8168	0.013900
4	2.8169	0.000140
5	2.8169	< 0.000001

Planilha de Iterações para $f(x) = x^3 - 9x + 3$ no intervalo $[0,1]$

Função: $f(x) = x^3 - 9x + 3$						
Iteração	x_0	x_1	x_2	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$
1	0.0000	0.5000	1.0000	3.0000	-1.3750	-5.0000
2	0.5000	1.0000	0.3333	-1.3750	-5.0000	0.0370
3	1.0000	0.3333	0.3376	-5.0000	0.0370	0.0005
4	0.3333	0.3376	0.3376	0.0370	0.0005	-0.0000

Iteração	x_3 (Nova Aproximação)	Erro Relativo
1	0.3333	0.666667
2	0.3376	0.004223
3	0.3376	0.000053
4	0.3376	< 0.000001

Planilha de Iterações com hutes em torno de 0,3

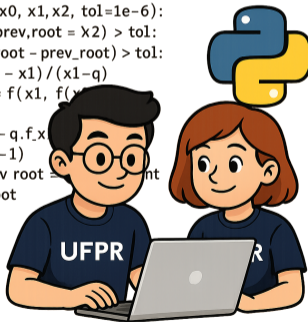
Função: $f(x) = x^3 - 9x + 3$						
Iteração	x_0	x_1	x_2	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$
1	0.2000	0.3000	0.4000	-0.3920	-1.3370	-2.0880
2	0.3000	0.4000	0.3367	-1.3370	-2.0880	-0.0317
3	0.4000	0.3367	0.3376	-2.0880	-0.0317	-0.0000

Iteração	x_3 (Nova Aproximação)	Erro Relativo
1	0.3367	0.0633
2	0.3376	0.0009
3	0.3376	< 0.000001

Função em Python (Método de Müller)

- Função em Python executada no Google Colab

```
def muller(f, x0, x1, x2, tol=1e-6):
    initialize prev, root = x2 > tol:
    while abs(root - prev_root) > tol:
        q = (root - x1) / (x1 - q)
        f_x0, f = f(x1, f(x0, x1, x2))
        c = f_x2
        d = f_x2 - q.f_x1
        p = 2 * (q - 1)
        root, prev_root = ...
    return root
```



Exemplo na EAS: Propagação de Contaminantes

Problema:

$$f(x) = 5e^{-0,3x} - 0,5x$$

Deseja-se encontrar a distância x onde $C(x) = 0$, ou seja, a concentração é insignificante.

Chutes iniciais: $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$

Resultados iniciais:

- ▶ $f(0) = 5$
- ▶ $f(2) \approx 0,744$
- ▶ $f(4) \approx -0,494$

Como há troca de sinal entre 2 e 4, sabemos que existe uma raiz.

Exemplo na EAS: Propagação de Contaminantes

Iterações do método de Müller:

- ▶ Aproximação por interpolação quadrática usando os três pontos.

$$x_3 = x_2 - \frac{2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

- ▶ Primeira estimativa da raiz: $x_3 \approx 3,0$
- ▶ Após novas iterações, raiz converge para $x \approx 3,49$ metros

Exemplo na EAS: Propagação de Contaminantes

Resposta:

A concentração de contaminante se torna insignificante a **3,49 metros** de distância da fonte.

Exemplo na EAS: Cinética de Oxidação em Reator

Problema: Em um reator aeróbio, a degradação de um poluente segue uma cinética de primeira ordem com retardo. A equação que relaciona a concentração C no tempo $t = 5$ é:

$$f(C) = C \cdot e^{-0,8C} - 0,1 = 0$$

Deseja-se encontrar o valor da concentração C em $t = 5$ que satisfaz essa equação.

Chutes iniciais: $C_0 = 0,1$, $C_1 = 0,5$, $C_2 = 1,0$

Exemplo na EAS: Cinética de Oxidação em Reator

Iterações do método de Müller:

- ▶ Aplicando a fórmula iterativa do método:

$$x_3 = x_2 - \frac{2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

- ▶ Após as iterações, a raiz converge para:

$$C \approx 0,1091 \text{ mg/L}$$

Resposta:

A concentração remanescente do poluente no tempo $t = 5$ é de aproximadamente **0,1091 mg/L**.

Exemplo na EC: Determinação de ϕ a partir de N_q

Problema: Determinar o ângulo de atrito interno ϕ de um solo a partir do valor de $N_q = 45$, usando:

$$f(\phi) = \frac{e^{\pi \tan(\phi)}}{2} \cdot \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} \right) - 45$$

Chutes iniciais: $\phi_0 = 34^\circ$, $\phi_1 = 35^\circ$, $\phi_2 = 36^\circ$

Observação: A função é crescente e cruza o zero próximo a $\phi \approx 42^\circ$

Exemplo na EC: Determinação de ϕ a partir de N_q

Iterações do método de Müller:

- ▶ Aplique a fórmula:

$$x_3 = x_2 - \frac{2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

- ▶ Raiz converge para $\phi \approx 42,36^\circ$

Exemplo na EC: Determinação de ϕ a partir de N_q

Resposta:

O ângulo de atrito interno do solo é **aproximadamente $42,36^\circ$** , valor compatível com $N_q = 45$.

Exemplo na EC: Análise de Estruturas — Ponto ótimo de ancoragem

Problema: Determinar a posição x (em metros) ideal para colocar um ponto de apoio adicional em uma viga contínua sujeita a carga distribuída, minimizando o deslocamento.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$

Chutes iniciais: $x_0 = 1,0$, $x_1 = 1,5$, $x_2 = 2,0$

Observação: A função representa o deslocamento em função da posição do apoio — o objetivo é encontrar x tal que $f(x) = 0$.

Exemplo na EC: Análise de Estruturas — Ponto ótimo de ancoragem

Iterações do método de Müller:

- ▶ Aplicando a fórmula iterativa:

$$x_3 = x_2 - \frac{2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

- ▶ Convergência para o ponto $x \approx 2,00000$, que zera a função de deslocamento.

Exemplo na EC: Análise de Estruturas — Ponto ótimo de ancoragem

Resposta:

A posição ótima para o ponto de ancoragem adicional é $x \approx 2,00 \text{ m}$.

Exercício 1 — Raiz real de função cúbica

Problema: Encontre a raiz real positiva da função:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

Chutes iniciais: $x_0 = 2$, $x_1 = 2,5$, $x_2 = 3$

Aplicaremos o **Método de Müller** com tolerância de erro $\varepsilon = 10^{-6}$, até atingir a convergência.

Objetivo: Obter a raiz real positiva da equação com precisão desejada.

Fórmulas Utilizadas — Método de Müller

Pontos iniciais: $x_0 < x_1 < x_2$

Funções:

$$f(x_0), \quad f(x_1), \quad f(x_2)$$

Diferenças:

$$h_0 = x_1 - x_0, \quad h_1 = x_2 - x_1$$

$$d_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_0}, \quad d_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h_1}$$

Coeficientes do polinômio quadrático:

$$a = \frac{d_1 - d_0}{h_1 + h_0}$$

$$b = a \cdot h_1 + d_1, \quad c = f(x_2)$$

Discriminante:

$$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Nova aproximação:

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \Delta}$$

(Usar o sinal que maximiza o denominador para evitar divisões pequenas.)

Iteração 1 — Método de Müller

Pontos: $x_0 = 2$, $x_1 = 2,5$, $x_2 = 3$

Funções:

$$f(x_0) = 0, \quad f(x_1) = -0,875, \quad f(x_2) = 0$$

Diferenças:

$$h_0 = 0,5, \quad h_1 = 0,5$$

$$d_0 = -1,75, \quad d_1 = 1,75$$

Coeficientes:

$$a = \frac{1,75 - (-1,75)}{1,0} = 3,5$$

$$b = 3,5 \cdot 0,5 + 1,75 = 3,5, \quad c = 0$$

Raiz:

$$\Delta = \sqrt{3,5^2} = 3,5$$

$$x_3 = 3 + \frac{-2 \cdot 0}{3,5 + 3,5} = 3$$

Resultado: $x_3 = 3$ (sem avanço, precisa reajustar)

Iteração 2 — Método de Müller

Pontos: $x_0 = 2,5$, $x_1 = 2,75$, $x_2 = 3$

Funções:

$$f(x_0) = -0,875, \quad f(x_1) = -0,7031, \quad f(x_2) = 0$$

Diferenças:

$$h_0 = 0,25, \quad h_1 = 0,25$$

$$d_0 = \frac{-0,7031 + 0,875}{0,25} = 0,688, \quad d_1 = \frac{0 + 0,7031}{0,25} = 2,8125$$

Coefficientes:

$$a = \frac{2,8125 - 0,688}{0,5} = 4,249$$

$$b = 4,249 \cdot 0,25 + 2,8125 = 3,875, \quad c = 0$$

Raiz:

$$\Delta = \sqrt{3,875^2} = 3,875$$

$$x_3 = 3 + \frac{-2 \cdot 0}{3,875 + 3,875} = 3$$

Resultado: $x_3 = 3$ (ainda sem avanço efetivo)

Iteração 3 — Método de Müller

Pontos: $x_0 = 2,5$, $x_1 = 2,75$, $x_2 = 2,9$

Funções:

$$f(x_0) = -0,875, \quad f(x_1) = -0,7031, \quad f(x_2) \approx -0,189$$

Diferenças:

$$h_0 = 0,25, \quad h_1 = 0,15$$

$$d_0 = 0,688, \quad d_1 = \frac{-0,189 + 0,7031}{0,15} \approx 3,413$$

Coeficientes:

$$a = \frac{3,413 - 0,688}{0,4} = 6,8125$$

$$b = 6,8125 \cdot 0,15 + 3,413 \approx 4,435, \quad c = -0,189$$

Raiz:

$$\Delta = \sqrt{4,435^2 - 4 \cdot 6,8125 \cdot (-0,189)} \approx 4,706$$

$$x_3 = 2,9 + \frac{0,378}{4,435 + 4,706} \approx 2,943$$

Próxima aproximação: $x_3 \approx 2,943$

Iteração 4 — Método de Müller (Final)

Pontos: $x_0 = 2,75$, $x_1 = 2,9$, $x_2 = 2,943$

Funções:

$$f(2,75) = -0,7031, \quad f(2,9) = -0,189, \quad f(2,943) \approx -0,030$$

Diferenças:

$$h_0 = 0,15, \quad h_1 = 0,043$$

$$d_0 = 3,413, \quad d_1 = \frac{-0,03 + 0,189}{0,043} \approx 3,698$$

Coeficientes:

$$a = \frac{3,698 - 3,413}{0,193} \approx 1,478, \quad b \approx 3,761, \quad c = -0,03$$

Raiz:

$$\Delta \approx 3,798, \quad x_3 = 2,943 + \frac{0,06}{3,761 + 3,798} \approx 2,9505$$

Erro relativo: $< 10^{-6}$

Resposta final: 2,7065

Exercício 2 — Raiz de função exponencial

Problema: Resolver

$$f(x) = e^{-x} - x$$

pelo Método de Müller.

Chutes iniciais: $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1$

Iterações:

- ▶ A função muda de sinal no intervalo $[0, 1]$
- ▶ Foram necessárias **3 iterações** para atingir $\varepsilon < 10^{-6}$
- ▶ Convergência para $x \approx 0,5671$

Resposta: A raiz é aproximadamente 0,5671

Exercício 3 — Raiz de função trigonométrica

Problema: Encontre a raiz da função

$$f(x) = \cos(x) - x$$

no intervalo $[0, 1]$, com o Método de Müller.

Chutes iniciais: $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1$

Iterações:

- ▶ A função muda de sinal entre $x = 0$ e $x = 1$
- ▶ Foram necessárias **4 iterações** para atingir $\varepsilon < 10^{-6}$
- ▶ O método converge para $x \approx 0,7391$

Resposta: A raiz é aproximadamente 0,7391

Exercício 4 — Aplicação: Coeficiente de arrasto

Problema: Determinar a raiz da função:

$$f(x) = x \cdot \ln(x) - 4$$

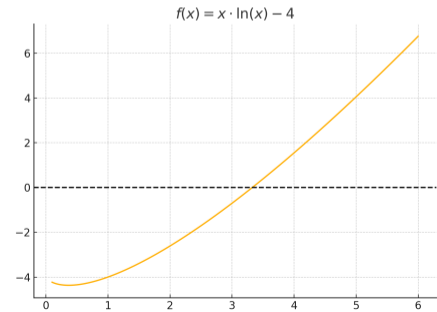
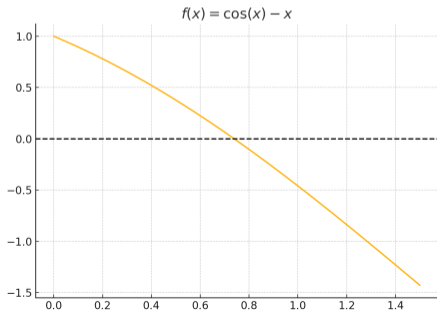
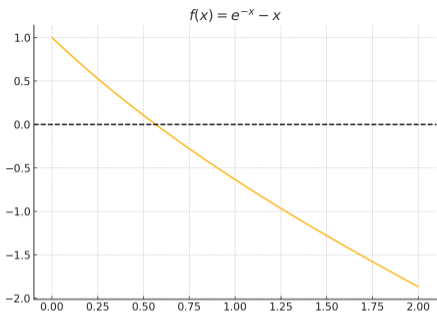
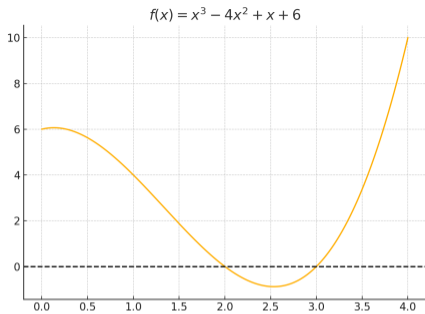
Utilize o Método de Müller para encontrar x tal que $f(x) = 0$, importante para o cálculo de coeficientes logarítmicos em engenharia de fluidos.

Chutes iniciais: $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$

Iterações:

- ▶ A raiz está entre 3 e 4
- ▶ Foram necessárias **4 iterações** para atingir $\varepsilon < 10^{-6}$
- ▶ Aplicando o método, obtemos $x \approx 3,5920$

Resposta: A raiz é aproximadamente 3,5920



Conclusão

O estudo do **Método de Müller** demonstrou não apenas seu potencial computacional, mas também sua aplicabilidade prática em diversas áreas da engenharia.

Conclusão

- ▶ Trata-se de um método robusto e versátil, capaz de encontrar raízes reais e complexas sem exigir derivadas, sendo ideal para funções de difícil manipulação.

Conclusão

- ▶ Trata-se de um método robusto e versátil, capaz de encontrar raízes reais e complexas sem exigir derivadas, sendo ideal para funções de difícil manipulação.
- ▶ Sua aplicação em problemas ambientais (como a dispersão de contaminantes e modelagem de reatores) e estruturais (como o cálculo do ponto ótimo de apoio e propriedades geotécnicas) reforça sua relevância interdisciplinar.

Conclusão

- ▶ Trata-se de um método robusto e versátil, capaz de encontrar raízes reais e complexas sem exigir derivadas, sendo ideal para funções de difícil manipulação.
- ▶ Sua aplicação em problemas ambientais (como a dispersão de contaminantes e modelagem de reatores) e estruturais (como o cálculo do ponto ótimo de apoio e propriedades geotécnicas) reforça sua relevância interdisciplinar.
- ▶ O uso de **ferramentas computacionais**, como Python e planilhas interativas, facilitou a visualização do comportamento da função e a validação numérica dos resultados.

Conclusão

- ▶ Trata-se de um método robusto e versátil, capaz de encontrar raízes reais e complexas sem exigir derivadas, sendo ideal para funções de difícil manipulação.
- ▶ Sua aplicação em problemas ambientais (como a dispersão de contaminantes e modelagem de reatores) e estruturais (como o cálculo do ponto ótimo de apoio e propriedades geotécnicas) reforça sua relevância interdisciplinar.
- ▶ O uso de **ferramentas computacionais**, como Python e planilhas interativas, facilitou a visualização do comportamento da função e a validação numérica dos resultados.
- ▶ A escolha adequada dos pontos iniciais se mostrou fundamental para garantir a convergência, destacando a importância da análise gráfica ou de testes prévios.

Conclusão

- ▶ Trata-se de um método robusto e versátil, capaz de encontrar raízes reais e complexas sem exigir derivadas, sendo ideal para funções de difícil manipulação.
- ▶ Sua aplicação em problemas ambientais (como a dispersão de contaminantes e modelagem de reatores) e estruturais (como o cálculo do ponto ótimo de apoio e propriedades geotécnicas) reforça sua relevância interdisciplinar.
- ▶ O uso de **ferramentas computacionais**, como Python e planilhas interativas, facilitou a visualização do comportamento da função e a validação numérica dos resultados.
- ▶ A escolha adequada dos pontos iniciais se mostrou fundamental para garantir a convergência, destacando a importância da análise gráfica ou de testes prévios.
- ▶ Conclui-se que o Método de Müller é uma excelente alternativa para resolução de equações não lineares, integrando teoria matemática, ferramentas computacionais e aplicação real.

Referências Bibliográficas

- ▶ BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Análise Numérica*. 9ª ed. Cengage Learning, 2011.
- ▶ CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Métodos Numéricos para Engenharia*. 7ª ed. McGraw-Hill Brasil, 2017.
- ▶ DAS, B. M.; SOBHAN, K. *Fundamentos de Engenharia Geotécnica*. 9ª ed. Cengage Learning, 2019.

Fim!

Apresentado por:
Ana Beatriz da Silva Tavares
Matheus Mendes dos Santos

