UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Cálculo Numérico

Metódos de Euler, Euler Melhorado e Runge Kutta (RK4)

Samuel Henrique Sbabo
Vinicius Poli
Nicolas Mendes

Índice

Método Euler

- SIMPLICIDADE
- FACILIDADE

Objetivos

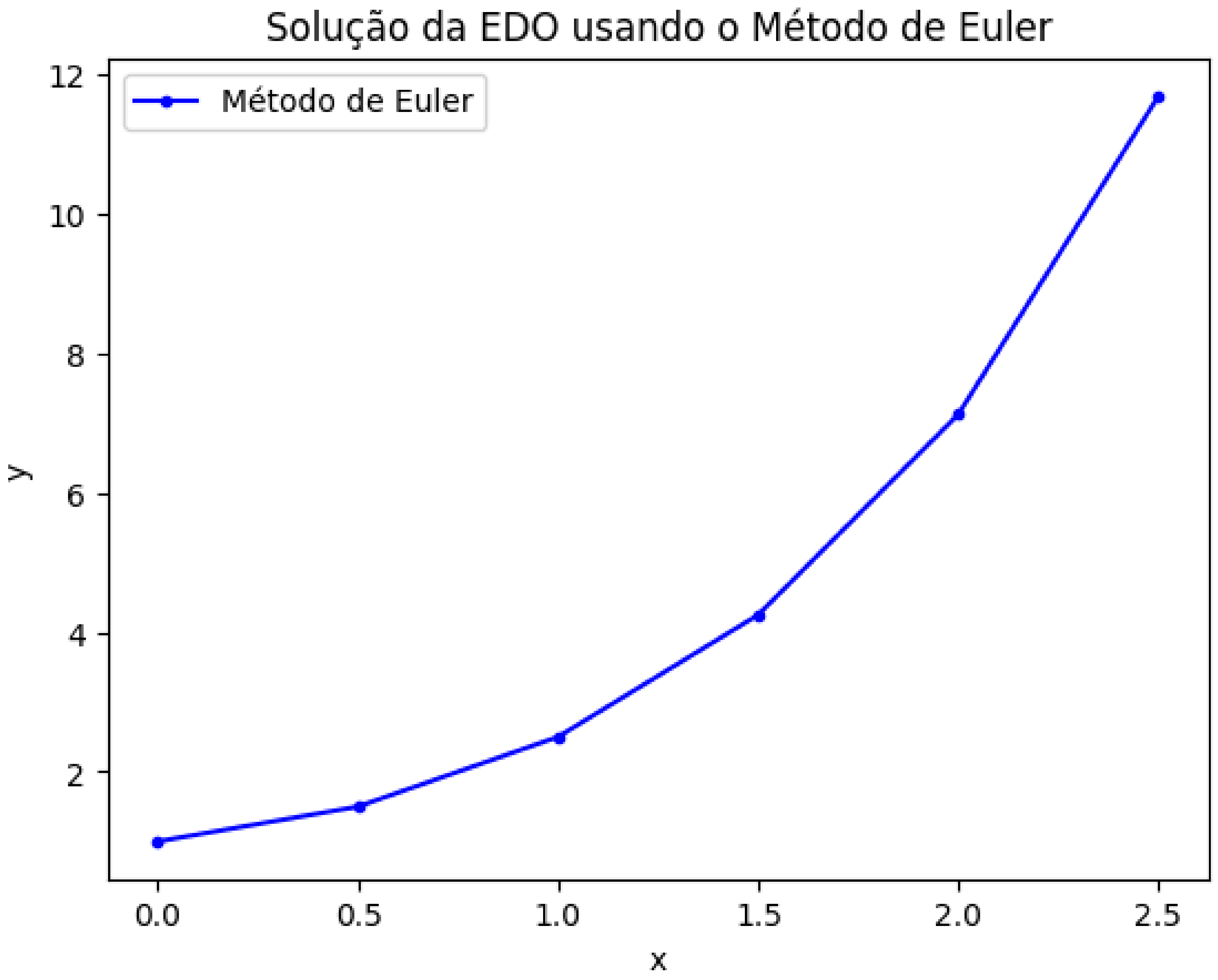
Método Euler

- Encontrar a coordenada y através de aproximações feitas pela reta tangente a um ponto conhecido.

- $$y = y_{-1} + f(x_{-1}, y_{-1}) \times h$$

Exercício em Python + Gráfico

```python
import matplotlib.pyplot as plt

# Definindo a função derivada
def f(x, y):
    return x + y

# Parâmetros do método de Euler
h = 0.5         # Tamanho do passo
y0 = 1          # Condição inicial y(0)
x0 = 0          # Condição inicial x(0)
n = int(input("Número de iterações: "))  # Número de iterações

# Inicialização das listas para armazenar os valores de x e y
x_values = [x0]
y_values = [y0]

# Implementação do método de Euler
for i in range(n):
    y_new = y0 + h * f(x0, y0)
    x_new = x0 + h
    x_values.append(x_new)
    y_values.append(y_new)
    y0 = y_new
    x0 = x_new

# Plotando a solução numérica
plt.plot(x_values, y_values, 'b.-', label='Método de Euler')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.title('Solução da EDO usando o Método de Euler')
plt.show()
```



Método Euler (Melhorado)

O Método de Euler Melhorado, também conhecido como Método do Ponto Médio, é uma melhoria do Método de Euler, usado para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs) de forma numérica.

Teoria E Conceito

1 - Divisão do Intervalo

O intervalo de tempo é dividido em pequenos "passos", e o tamanho de cada passo é definido antes do cálculo.

2 - Cálculo da Inclinação Inicial

No início de cada passo, o método calcula a inclinação da função no ponto inicial do intervalo.

3 - Estimativa no Meio do Intervalo

O Método de Euler Melhorado usa a inclinação no início do intervalo para estimar a inclinação no meio do intervalo, ajustando assim o cálculo do próximo valor.

4 - Atualização do Valor

O método usa a inclinação no meio do intervalo para atualizar o valor da função, o que torna a solução mais precisa ao considerar a mudança na inclinação ao longo do intervalo.

Fórmula do Método de Euler Melhorado:

Cálculo de K1:

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

Onde f(t,y) é a função que descreve a derivada da função y(t) no pont (tn,yn)

Cálculo de K2:

$$k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$$

Aqui, o valor da função f é avaliado no ponto médio do intervalo, ajustado pela metade do passo h.

Atualização do valor de y:

$$y_{n+1} = y_n + hk_2$$

O valor de yn+1 é atualizado usando o valor médio k2, o que melhora a precisão comparado ao Método de Euler simples.

Benefícios

Por Que o Método de Euler Melhorado é Melhor?

Maior Precisão:

Considera a inclinação no meio do intervalo, o que reduz erros em comparação com o Método de Euler simples, especialmente quando a função muda rapidamente.

Bom Equilíbrio

Oferece uma solução mais precisa que o Método de Euler simples, sem exigir a complexidade dos métodos mais avançados, como Runge-Kutta.

Exercício Resolvido

Problema:

Resolver a EDO dada por:

$$\frac{dy}{dt} = -2y$$

Com a condição inicial:

$$y(0) = 1$$

Solução Passo-a-Passo

1. Definir o Problema:

A equação diferencial que queremos resolver é dy/dt= −2y.
A condição inicia y(0) = 1.

2. Aplicar o Método de Euler Melhorado:

Cálculo de k1:

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$ onde, $$f(t, y) = -2y.$$

Cálculo de k2:

Aqui estimamos o Valor do ponto médio do intervalo e a inclinação nesse ponto

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k_1\right)$$

H é o tamanho do passo ou quantidade de mudança da variável.

Atualização do valor de y:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot k_2$$

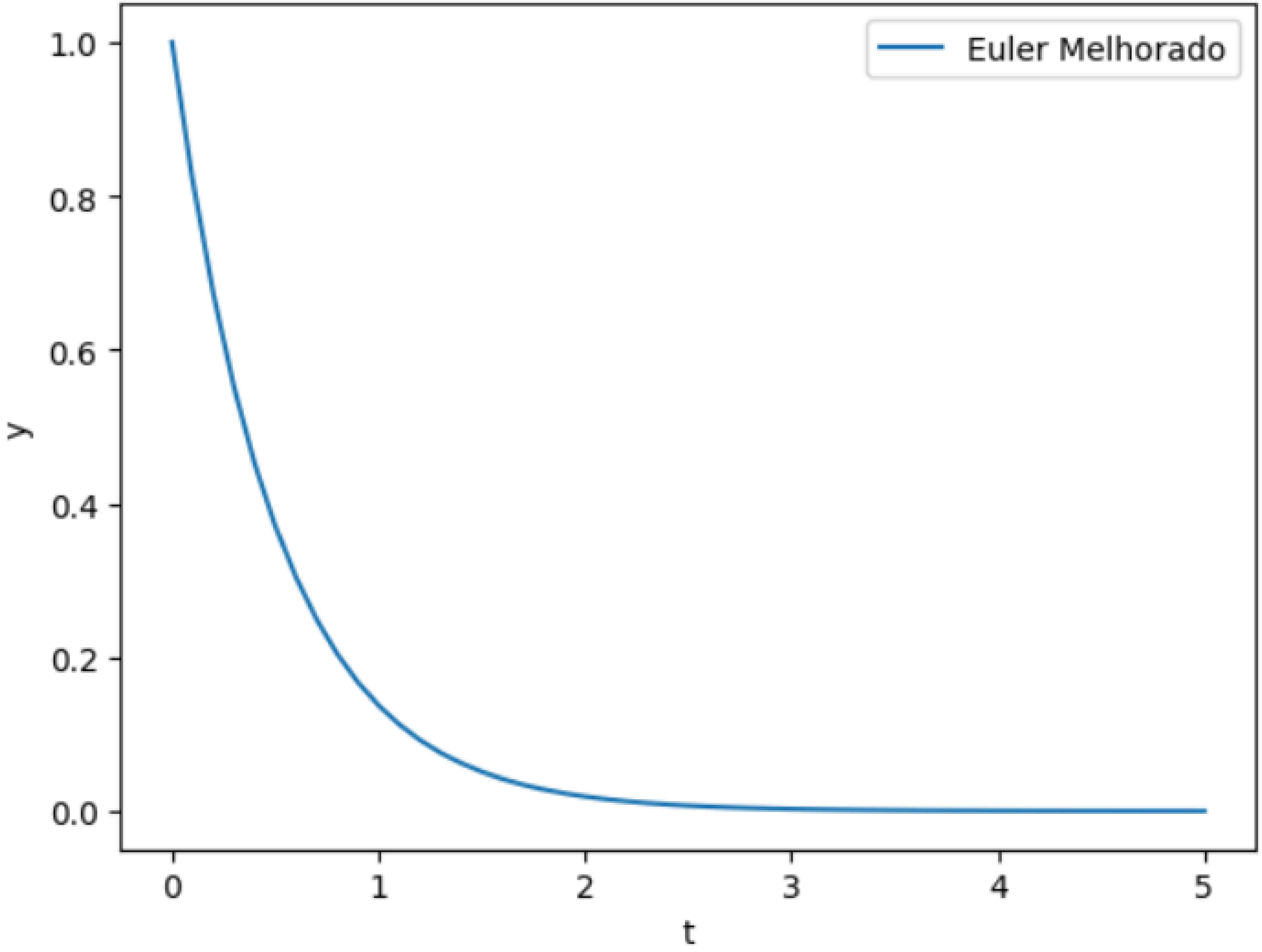
Exemplo Prático Simples

Imagine que você está subindo uma colina. Primeiro, você mede a inclinação exatamente onde começa a subir (K1). Então, você olha para o meio do caminho e vê se a inclinação muda (K2). Finalmente, você usa essa informação para ajustar sua caminhada e garantir que você siga um caminho mais preciso.
Assim, K1 te dá a ideia inicial, e K2 te ajuda a ajustar sua rota para torná-la mais precisa. É como desenhar um caminho com mais detalhes, garantindo que o desenho seja o mais fiel possível ao que você realmente vê e sente enquanto caminha.

Exercício em Python + Gráfico

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Função derivada
def f(t, y):
    return -2 * y

# Parâmetros
h = 0.1  # Tamanho do passo
t = np.arange(0, 5 + h, h)  # Cria um array de tempos de 0 a 5 com passo h
y = np.zeros(t.shape)  # Inicializa o array para armazenar os valores de y
y[0] = 1  # Condição inicial y(0) = 1

# Método de Euler Melhorado
for i in range(1, len(t)):
    k1 = f(t[i-1], y[i-1])  # Calcula a inclinação no início do intervalo
    k2 = f(t[i-1] + h/2, y[i-1] + h*k1/2)  # Calcula a inclinação no meio do intervalo
    y[i] = y[i-1] + h * k2  # Atualiza o valor de y usando a inclinação do meio

# Plotando os resultados
plt.plot(t, y, label='Euler Melhorado')  # Plota a solução obtida
plt.xlabel('t')  # Rótulo do eixo x
plt.ylabel('y')  # Rótulo do eixo y
plt.legend()  # Adiciona a legenda ao gráfico
plt.show()  # Exibe o gráfico
```

Exercício em Python + Gráfico



Método Runge-Kutta (RK4)

O método de Runge-Kutta de quarta ordem é uma técnica numérica usada para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs). É popular por seu equilíbrio entre precisão e eficiência. O RK4 é uma melhoria sobre métodos mais simples como o de Euler, pois usa várias avaliações da função para obter uma aproximação mais precisa.

Objetivos

Método Runge-Kutta (RK4)

Obter Soluções Numéricas Precisas para Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs): O método RK4 é utilizado para calcular soluções aproximadas de EDOs quando as soluções analíticas são difíceis ou impossíveis de encontrar. Ele fornece uma maneira eficiente e precisa de determinar os valores das funções em pontos discretos, especialmente útil em casos onde se requer alta precisão, como em simulações científicas e de engenharia.

Reduzir o Erro de Truncamento e Garantir Estabilidade Numérica: O RK4 é conhecido por seu baixo erro de truncamento em comparação com métodos de ordem inferior, como o método de Euler. Ele alcança uma ordem de precisão de 4, o que significa que o erro diminui rapidamente à medida que o tamanho do passo é reduzido. Isso permite o uso de tamanhos de passo maiores sem comprometer significativamente a precisão, tornando-o uma escolha eficiente para muitos problemas práticos.

Derivação das Fórmulas

As fórmulas do RK4 são baseadas em calcular quatro "slopes" (declives) ou estimativas da derivada em diferentes pontos dentro do intervalo de integração. Elas são dadas por:

1. $k_1 = f(t_n, y_n)$
2. $k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2})$
3. $k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2})$
4. $k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3)$

Atualize o valor de y usando:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Onde:

- y_n é o valor aproximado da solução no ponto t_n.
- h é o tamanho do passo.

Vantagens do Método RK4

O método RK4 é altamente preciso e é considerado de ordem 4, o que significa que o erro local de truncamento é da ordem de O(h5) e o erro global é da ordem de O(h4). Isso permite que ele seja bastante preciso mesmo com tamanhos de passo relativamente grandes. Além disso, o método é autossuficiente, não necessitando de derivadas mais altas, o que o torna aplicável a uma ampla gama de problemas.

Exercício Resolvido

Problema:

Resolver a EDO dada por:

$$\frac{dy}{dt} = t + y$$

Com a condição inicial:

Condição inicial y(0)=1 e queremos encontrar y em t=0.2 usando h=0.1

Solução Passo-a-Passo

- Determinar os Valores Iniciais

Como o intervalo é de t0=0 até t=0.2 com um passo h=0.1 o número de passos é:

$$N = \frac{0.2-0}{0.1} = 2$$

Passo 1: De t0=0 a t1=0.1

- Iterar Sobre Cada Passo:

1. $k_1 = f(t_n, y_n)$
2. $k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2})$
3. $k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2})$
4. $k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3)$

- **Atualize o valor de y:**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Passo 2: De t1=0.1 a t2=0.2

Repetir os passos utilizando as fórmulas de k1, k2, k3 e k4. Após isso, realizar a atualização de y.

1. $k_1 = f(t_n, y_n)$
2. $k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2})$
3. $k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2})$
4. $k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3)$

Após isso, realizar a atualização de y.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Exercício Resolvido

Exemplo Prático: Movimento de um Objeto em Queda Livre com Resistência do Ar.

Suponha que estamos estudando o movimento de um objeto caindo em um fluido, onde a resistência do ar é proporcional à velocidade. A equação diferencial que descreve este sistema é:

$$\frac{dv}{dt} = g - kv$$

Onde:

- **v** é a velocidade do objeto,
- **g** é a aceleração devido à gravidade (aproximadamente 9,81 m/s²),
- **k** é uma constante de proporcionalidade que depende da resistência do ar.

Vamos usar o método RK4 para calcular a velocidade do objeto após um pequeno intervalo de tempo Δt.

Passo 1 - Definição dos Parâmetros:

- Aceleração devido à gravidade, g=9.81 m/s²g;
- Constante de resistência do ar, k=0.1 s-¹;
- Velocidade inicial, v0=0 m/s (objeto em repouso);
- Intervalo de tempo, Δt=0.1 s.

- **Passo 2 - Cálculo dos Coeficientes K1, K2, K3, K4:**

1. $K1$: Avaliação da inclinação no ponto inicial
   $K1 = g - kv$
2. $K2$: Avaliação da inclinação no ponto intermediário usando $K1$
   $K2 = g - k\left(v + \frac{K1\Delta t}{2}\right)$
3. $K3$: Outra avaliação intermediária para refinar a estimativa
   $K3 = g - k\left(v + \frac{K2\Delta t}{2}\right)$
4. $K4$: Avaliação final da inclinação
   $K4 = g - k(v + K3\Delta t)$

- **Passo 3 - Atualização da Velocidade:**

A nova velocidade é calculada como uma média ponderada dessas inclinações:

$$v_{\text{novo}} = v + \frac{\Delta t}{6}(K1 + 2K2 + 2K3 + K4)$$

Calculando isso para um passo de tempo:

A nova velocidade do objeto após 0,1 segundos é aproximadamente 0,976 m/s.

Exemplo Prático - Python

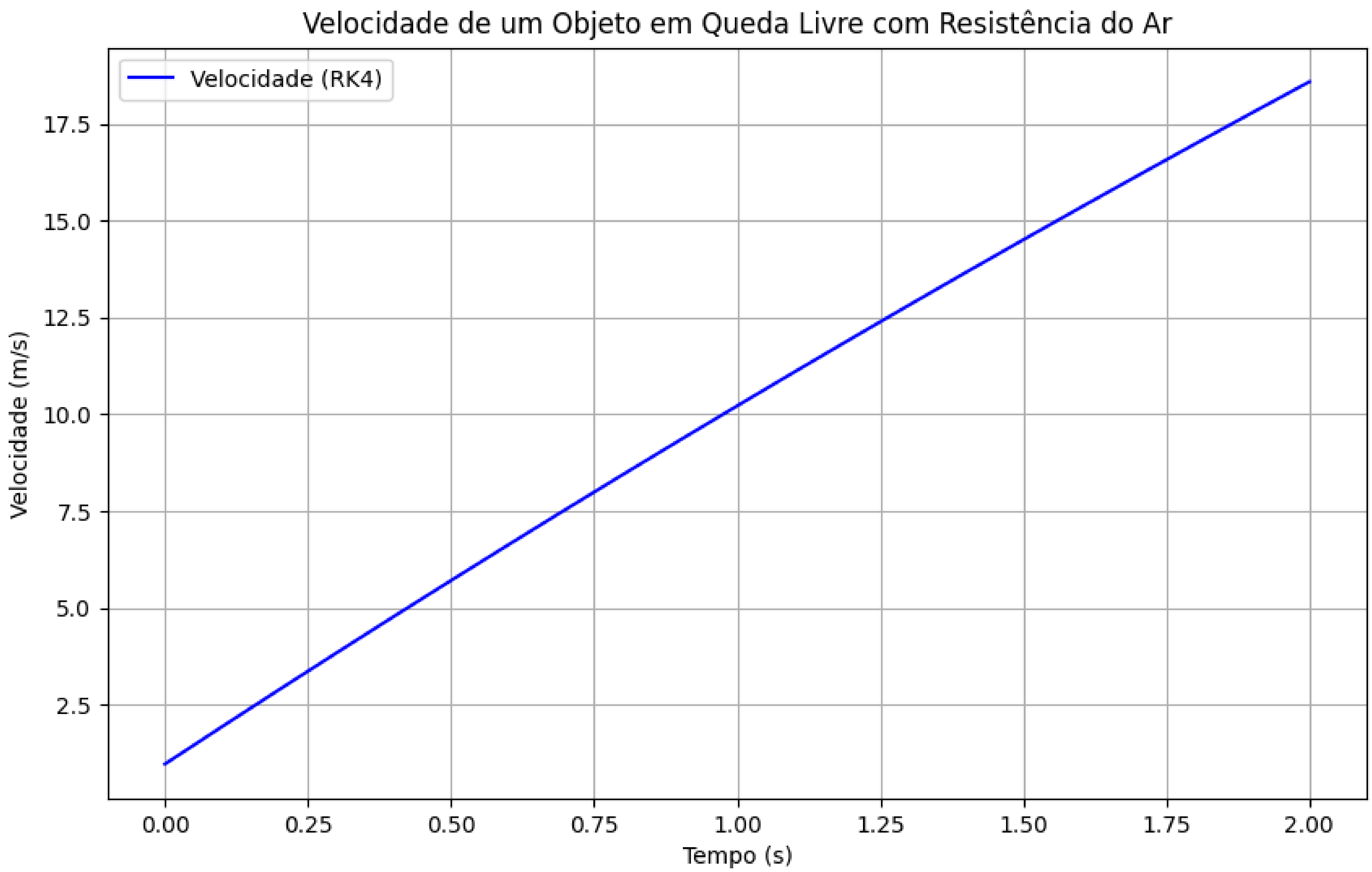
Código aplicado no Python

```python
# Definindo os parâmetros
g = 9.81  # aceleração devido à gravidade (m/s^2)
k = 0.1   # constante de resistência do ar (s^-1)
v0 = 0.0  # velocidade inicial (m/s)
delta_t = 0.1  # intervalo de tempo (s)
tempo_total = 2.0  # tempo total de simulação (s)

# Lista para armazenar os resultados
tempos = []
velocidades = []

# Loop para calcular a velocidade em cada intervalo de tempo
t = 0.0
v = v0
while t <= tempo_total:
    tempos.append(t)
    velocidades.append(v)

    # Calculando os coeficientes K1, K2, K3, K4
    K1 = g - k * v
    K2 = g - k * (v + 0.5 * K1 * delta_t)
    K3 = g - k * (v + 0.5 * K2 * delta_t)
    K4 = g - k * (v + K3 * delta_t)

    # Calculando a nova velocidade
    v = v + (delta_t / 6) * (K1 + 2 * K2 + 2 * K3 + K4)
    t += delta_t

# Exibindo os resultados
for tempo, velocidade in zip(tempos, velocidades):
    print(f"Tempo: {tempo:.1f} s, Velocidade: {velocidade:.2f} m/s")
```

Resposta gerada através do código

```
Tempo: 0.0 s, Velocidade: 0.00 m/s
Tempo: 0.1 s, Velocidade: 0.98 m/s
Tempo: 0.2 s, Velocidade: 1.94 m/s
Tempo: 0.3 s, Velocidade: 2.90 m/s
Tempo: 0.4 s, Velocidade: 3.85 m/s
Tempo: 0.5 s, Velocidade: 4.78 m/s
Tempo: 0.6 s, Velocidade: 5.71 m/s
Tempo: 0.7 s, Velocidade: 6.63 m/s
Tempo: 0.8 s, Velocidade: 7.54 m/s
Tempo: 0.9 s, Velocidade: 8.44 m/s
Tempo: 1.0 s, Velocidade: 9.34 m/s
Tempo: 1.1 s, Velocidade: 10.22 m/s
Tempo: 1.2 s, Velocidade: 11.09 m/s
Tempo: 1.3 s, Velocidade: 11.96 m/s
Tempo: 1.4 s, Velocidade: 12.82 m/s
Tempo: 1.5 s, Velocidade: 13.66 m/s
Tempo: 1.6 s, Velocidade: 14.50 m/s
Tempo: 1.7 s, Velocidade: 15.34 m/s
Tempo: 1.8 s, Velocidade: 16.16 m/s
Tempo: 1.9 s, Velocidade: 16.98 m/s
Tempo: 2.0 s, Velocidade: 17.78 m/s
```

Exemplo Prático - Python



Exemplo Prático - Excel

Tempo (s)	Velocidade (m/s)	K1	K2	K3	K4
0.0	0.000	9.81	9.81	9.81	9.81
0.1	0.976	9.81	9.40	9.29	8.98
0.2	1.923	9.81	8.83	8.51	8.23
0.3	2.845	9.81	8.28	7.84	7.68
0.4	3.746	9.81	7.78	7.22	7.08
0.5	4.628	9.81	7.30	6.65	6.51
0.6	5.493	9.81	6.85	6.12	6.00
0.7	6.343	9.81	6.42	5.64	5.55
0.8	7.179	9.81	6.01	5.21	5.15
0.9	8.002	9.81	5.62	4.81	4.79
1.0	8.812	9.81	5.25	4.43	4.47
1.1	9.610	9.81	4.90	4.07	4.18
1.2	10.396	9.81	4.57	3.73	3.93
1.3	11.171	9.81	4.26	3.41	3.71
1.4	11.936	9.81	3.98	3.11	3.52
1.5	12.692	9.81	3.71	2.82	3.36
1.6	13.439	9.81	3.47	2.55	3.24
1.7	14.177	9.81	3.25	2.30	3.14
1.8	14.908	9.81	3.06	2.06	3.07
1.9	15.634	9.81	2.89	1.84	3.02
2.0	16.354	9.81	2.76	1.63	2.99

- Colunas da tabela:
- Cálculo dos Coeficientes:
- Atualização de ‘y’:
- Iterações e Visualização:

Compação dos métodos

Método de Euler

Simples, mas menos preciso e pode ser instável. Adequado para modelos simples e situações educativas onde a precisão não é crítica.

Aplicações: Modelagem Simples de Crescimento Populacional.

Método de Euler Melhorado (Método do Ponto Médio)

Mais preciso que o Método de Euler, mas ainda pode ter problemas de estabilidade. Ideal para sistemas mecânicos simples e simulações onde uma precisão melhor é necessária sem um grande aumento na complexidade.

Aplicações: Simulação de Sistemas Mecânicos Simples

Método de Runge-Kutta (RK4)

Muito preciso e estável, mas mais complexo e computacionalmente mais caro. Preferido para problemas complexos e situações que exigem alta precisão, como modelos climáticos e dinâmicas de sistemas complexos.

Aplicações: Problemas de Dinâmica de Sistemas Complexos

Conclusão

Em resumo, os métodos de Euler, Euler Melhorado e Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) são técnicas fundamentais para a solução de equações diferenciais ordinárias (EDOs), cada um com suas particularidades e aplicações específicas.

Cada um desses métodos tem suas vantagens e desvantagens, e a escolha do método adequado depende das especificidades do problema em questão, como a precisão necessária e os recursos computacionais disponíveis. A compreensão profunda dessas técnicas permite uma aplicação mais eficaz em problemas reais, proporcionando soluções robustas e precisas.

Referências Bibliográficas

- BARROSO, Leonidas Conceição; et al. Calculo numérico (com aplicações). 2. Ed. Minas Gerais, editora HARBRA.
- Métodos Numéricos, Adriana Xavier Freitas, Danielle Franco Nicolau, Prof. Armando. Departamento de Matemática – UFMG – 12 de dezembro de 2008
- BOYCE, E. William, DIPRIMA, C. Richard. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. Sétima edição, editora LTC.

Obrigado!!

Disciplina: Cálculo Numérico

Alunos: Samuel Henrique Sbabo

Vinicius Poli

Nicolas Mendes

Professor: Drº Rogério Vargas