

Método de Euler e suas variantes

Luís Fernando Vila Branca Vaz
Dieno Gabriel Leite da Silva
Larissa Prates Souza

18 de junho de 2025

A solução de equações diferenciais ordinárias (EDOs) é uma parte fundamental da matemática aplicada, especialmente na modelagem de fenômenos físicos, biológicos, econômicos e de engenharia. No entanto, nem sempre é possível encontrar soluções analíticas (exatas) para essas equações. Quando isso acontece, recorre-se a métodos numéricos, que aproximam a solução da EDO por meio de cálculos iterativos.

Uma das abordagens mais simples e intuitivas para resolver numericamente uma EDO é o método de Euler. Esse método parte de uma ideia básica: se conhecemos a inclinação da solução (ou seja, a derivada) em um ponto, podemos estimar o valor da função em um ponto próximo, traçando uma reta tangente. Ele é aplicado geralmente a EDOs de primeira ordem da forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

Método de Euler

A fórmula de Euler para obter uma aproximação y_{n+1} a partir do ponto (t_n, y_n) é:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$$

onde h é o passo de integração (um pequeno intervalo no tempo ou na variável independente).

Apesar de sua simplicidade, o método de Euler pode apresentar erros significativos se o passo h não for suficientemente pequeno. Por isso, foram desenvolvidas variações do método de Euler que aumentam a precisão sem exigir passos extremamente pequenos. Algumas dessas variantes incluem:

- **Método de Euler melhorado (ou método de Heun):** faz uma média entre a inclinação no início e no final do intervalo para obter melhor aproximação.
- **Método do ponto médio:** estima a inclinação no ponto médio do intervalo.
- **Método de Runge-Kutta de ordem 4 (RK4):** uma versão mais sofisticada que usa quatro estimativas da inclinação para cada passo, com alta precisão.

Método de Euler Simples

Método de Euler Simples

Dado um passo h , o método de **Euler simples** para a solução numérica da equação diferencial

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

é definido pela seguinte fórmula de iteração:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n),$$

Exemplo com o Método Euler Simples

Aproximação pelo método de Euler simples para $\frac{dy}{dx} = y - x$, com $y(0) = 2$ e $h = 0,1$.

x_n	y_n	$f(x_n, y_n) = y_n - x_n$	$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$
0,0	2,000	2,000	2,200
0,1	2,200	2,100	2,410
0,2	2,410	2,210	2,631

Método de Euler Modificado

Dado um passo h , o método é definido pelas seguintes fórmulas:

1) Previsão com Euler (chute inicial)

$$y^* = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

2) Correção com a média das inclinações:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*))$$

Exemplo com o Método de Heun

Considere a seguinte EDO

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1$$

Vamos usar o método de Heun com passo $h = 0,1$, para encontrar uma aproximação de y nos pontos $x = 0; 0,1$ e $0,2$, sendo $f(x, y) = x + y$.

x_n	y_n	y^*	y_{n+1}
0,0	1,00000	1,10000	1,11000
0,1	1,11000	1,23100	1,24205
0,2	1,24205	1,38626	1,39847

Exercício Resolvido

Considere a seguinte EDO:

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(1) = 2$$

Use o método Euler Simples com passo $h = 1$, para encontrar uma aproximação de y no intervalo $x \in [1, 5]$, sendo $f(x, y) = x + y$.

x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	y_{n+1}
1,0	2,00	3,00	5,00
2,0	5,00	7,00	12,00
3,0	12,00	15,00	27,00
4,0	27,00	31,00	58,00
5,0	58,00		

Exercício Resolvido

Considere a seguinte EDO:

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y + \cos(x), \quad y(0) = 1$$

Use o método de Euler Simples com passo $h = 0,5$, para encontrar uma aproximação de y no intervalo $x \in [0, 2]$, sendo $f(x, y) = x \cdot y + \cos(x)$.

x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	y_{n+1}
0,0	1,000	1,000	1,500
0,5	1,500	1,745	2,375
1,0	2,375	3,375	4,062
1,5	4,062	7,093	7,609
2,0	7,609		

A solução analítica da EDO dos exemplos é

$$y(x) = 2e^x - x - 1$$

e seus valores verdadeiros são

x	$y(x)$
0,1	1,11034
0,2	1,24280

Comparação dos métodos

x	y Real	Heuen	Ponto médio	RK4
0,1	1,11034	1,24205	1,24205	1,24280
0,2	1,24280	1,39847	1,39847	1,39775

Os valores tendem a se aproximar do resultado real quando o passo h é suficientemente pequeno.

- O método de Euler melhorado (ou de Heun) é simples de implementar e representa uma melhoria significativa em relação ao Euler simples, oferecendo boa precisão com apenas duas avaliações da função por passo.
- O método do ponto médio também é de segunda ordem e oferece resultados semelhantes ao de Heun, sendo útil quando se busca um equilíbrio entre precisão e eficiência, com baixo custo computacional.
- Já o método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4) é amplamente utilizado devido à sua alta precisão, mesmo com passos relativamente grandes.

- O método de Euler melhorado (Heun), apesar de mais preciso que o Euler simples, ainda pode apresentar erros significativos se o passo for muito grande. Ele não lida bem com equações rígidas (stiff).
- O método do ponto médio também sofre com limitações em equações mais complexas e pode ser instável com passos grandes. Ambos os métodos de segunda ordem exigem um controle cuidadoso do tamanho do passo para manter a precisão.
- O método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4), embora muito preciso, tem um custo computacional mais alto por passo, já que exige quatro avaliações da função. Em problemas que exigem muitas iterações ou sistemas grandes, isso pode se tornar pesado. Além disso, como todos os métodos explícitos, o RK4 também pode falhar em lidar com equações rígidas sem adaptação no passo.

Código 1 - Crescimento Populacional usando o Método Euler

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # --- Parâmetros e EDO ---
5 def f(x, y): return y # dy/dx = y
6 y0, x0, x_final, h = 1, 0, 2, 0.1 # y(0)=1, x inicial, x final, passo
7
8 # --- Método de Euler ---
9 x_euler, y_euler = [x0], [y0]
10 x, y = x0, y0
11 while x < x_final:
12     h_current = min(h, x_final - x) # Ajusta o último passo
13     y += h_current * f(x, y)
14     x += h_current
15     x_euler.append(x)
16     y_euler.append(y)
17
18 # --- Solução Analítica (e^x) e Plotagem ---
19 x_analytical = np.linspace(x0, x_final, 100)
20 y_analytical = np.exp(x_analytical) # Solução para y(0)=1
21
22 plt.figure(figsize=(10, 6))
23 plt.plot(x_euler, y_euler, 'o-', label=f'Euler (h={h})')
24 plt.plot(x_analytical, y_analytical, 'r--', label='Analítica (e^x)')
25 plt.title('EDO dy/dx = y (Método de Euler)')
26 plt.xlabel('x')
27 plt.ylabel('y')
28 plt.legend()
29 plt.grid(True)
30 plt.show()
```

Figura: Exemplo ilustrativo do comportamento de um dos métodos.

Exemplo 1 - Realizado em Colab

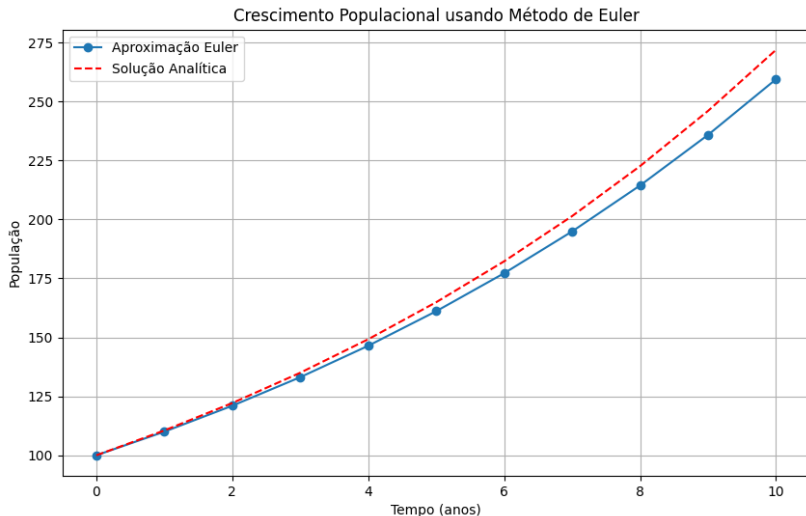


Figura: Exemplo do Método de Euler para o crescimento populacional.

Código 2 - Realizado em Colab

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # --- 1. Definindo a EDO e Solução Analítica ---
5 #  $dy/dx = y$ ; Solução analítica para  $y(0)=1$  é  $y(x) = e^x$ 
6 def f(x, y):
7     return y
8
9 def analytical_solution(x, y0_val):
10     return y0_val * np.exp(x)
11
12 # --- 2. Implementação Simplificada do Método de Euler ---
13 def euler_method_simple(f, y0, x0, x_final, h):
14     x_values = np.arange(x0, x_final + h, h)
15     y_values = [y0]
16     y = y0
17
18     for i in range(len(x_values) - 1):
19         y += h * f(x_values[i], y)
20         y_values.append(y)
21     return x_values, np.array(y_values) # Retorna numpy arrays para facilitar operações
22
23 # --- 3. Parâmetros da Simulação ---
24 y0 = 1 # Condição inicial  $y(0) = 1$ 
25 x0 = 0 # Ponto inicial de x
26 x_final = 2 # Ponto final de x
27 h = 0.1 # Tamanho do passo
28
29 # --- 4. Executando e Comparando ---
30 x_euler, y_euler = euler_method_simple(f, y0, x0, x_final, h)
31 y_analytical = analytical_solution(x_euler, y0) # Calcula a analítica nos mesmos pontos de x do Euler
32
33 # --- 5. Plotando os Resultados ---
34 plt.figure(figsize=(10, 6))
35 plt.plot(x_euler, y_euler, 'o-', label=f'Método de Euler (h={h})')
36 plt.plot(x_euler, y_analytical, 'r--', label='Solução Analítica ( $e^x$ )') # Usa x_euler para a analítica
37 plt.title('Resolução de EDO usando o Método de Euler')
38 plt.xlabel('x')
39 plt.ylabel('y')
40 plt.legend()
41 plt.grid(True)
42 plt.show()
43
44 # --- 6. Exibindo Resultados Numéricos de Forma Concisa ---
45 print("\n--- Resultados (Método de Euler vs. Analítico) ---")
46 results = np.column_stack((x_euler, y_euler, y_analytical, np.abs(y_euler - y_analytical)))
47 print(" x      y_Euler    y_Analitica    Erro")
48 print("-----")
49 for row in results:
50     print(f"{row[0]:.2f}      {row[1]:.4f}      {row[2]:.4f}      {row[3]:.4f}")
```

Figura: Código realizado em colab do Método de Euler.

Exemplo 2 - Realizado em Colab

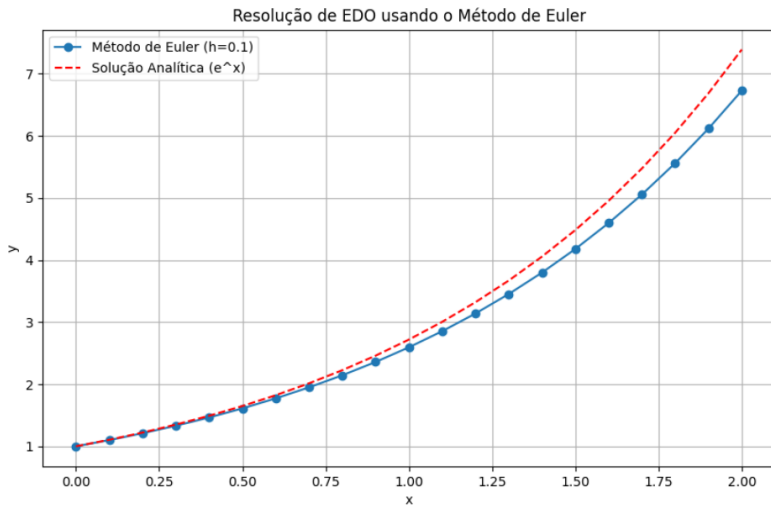


Figura: Exemplo do Método de Euler.

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. Análise Numérica. 9. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. Métodos Numéricos para Engenharia. 7. ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.

IMBASSAHY, Suely Oliveira. Métodos Numéricos Computacionais. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.