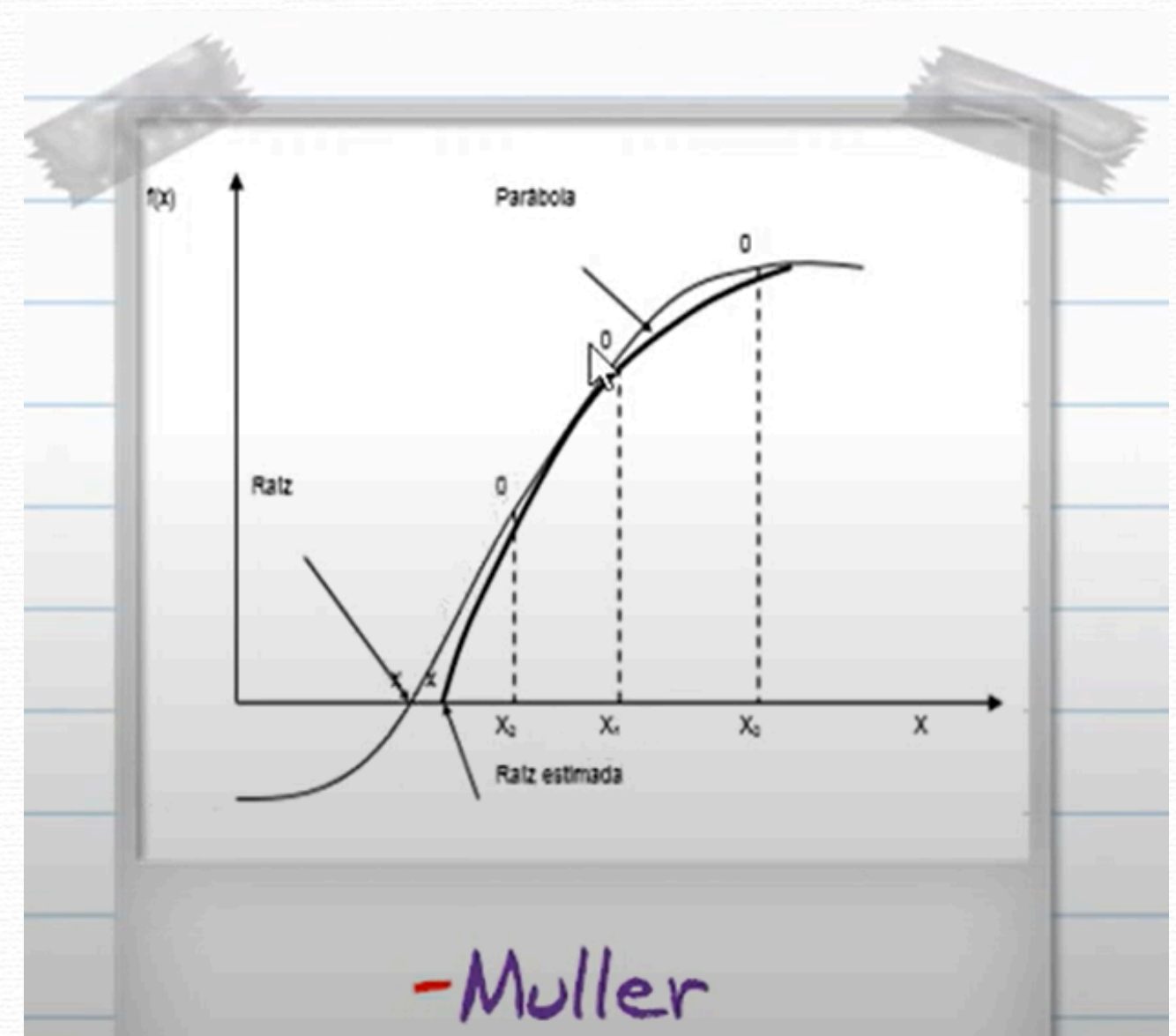


# MÉTODO DE MULLER

# Introdução

O Método de Muller é um método numérico usado para encontrar raízes de funções, ou seja, valores de  $x$  para os quais  $f(x) = 0$ . Ele é baseado na interpolação de uma parábola (função quadrática) que passa por três pontos da função.





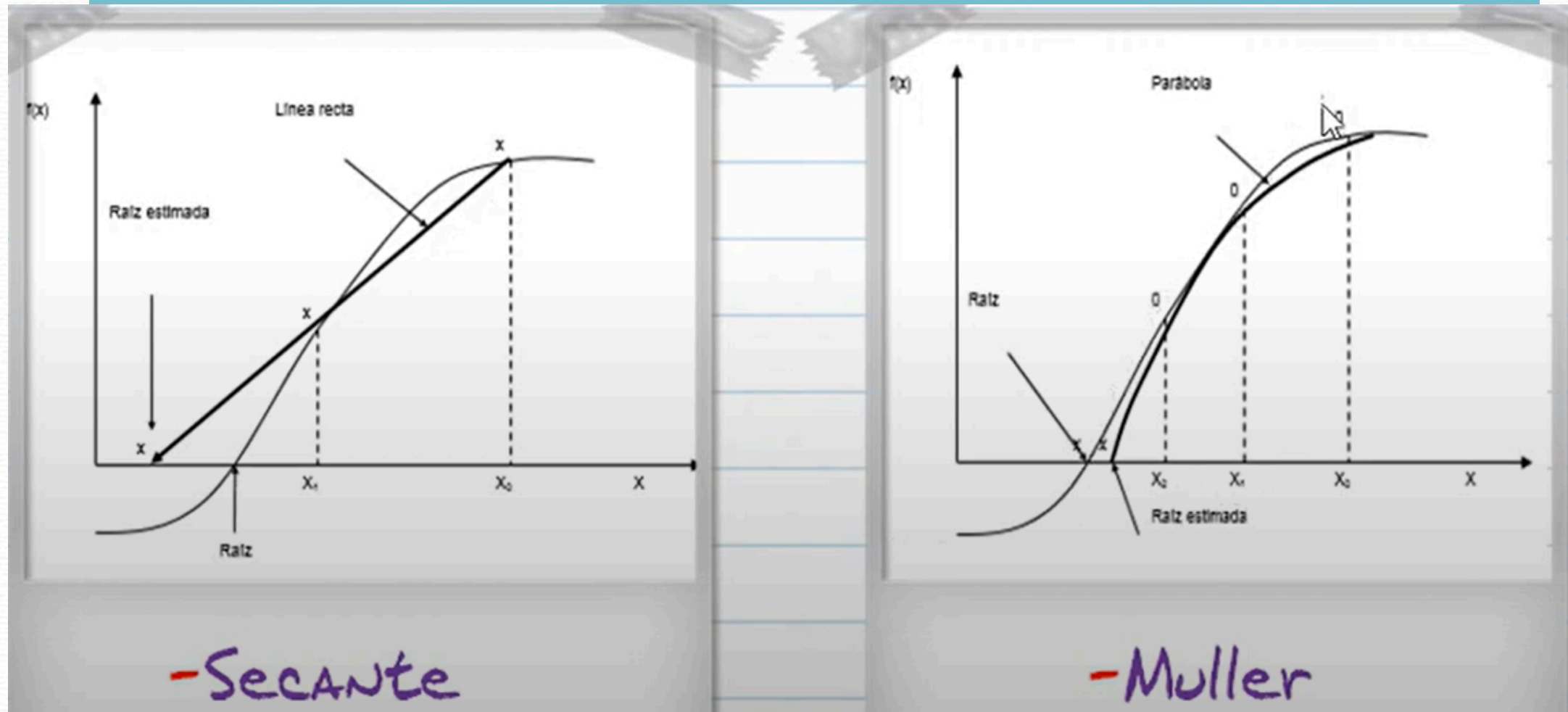
## Como funciona?

1. Escolhem-se três pontos iniciais  $x_0$ ,  $x_1$  e  $x_2$ , com seus respectivos valores  $f(x_0)$ ,  $f(x_1)$ ,  $f(x_2)$ .
2. Com esses pontos, é construída uma parábola que aproxima a função.
3. Calcula-se onde essa parábola corta o eixo  $x$  (ou seja, resolve-se uma equação do 2º grau).
4. O valor encontrado é usado como novo ponto, substituindo o mais antigo.
5. O processo se repete até encontrar a raiz com precisão desejada.

Esse método pode encontrar raízes reais ou complexas e não exige o uso de derivadas.



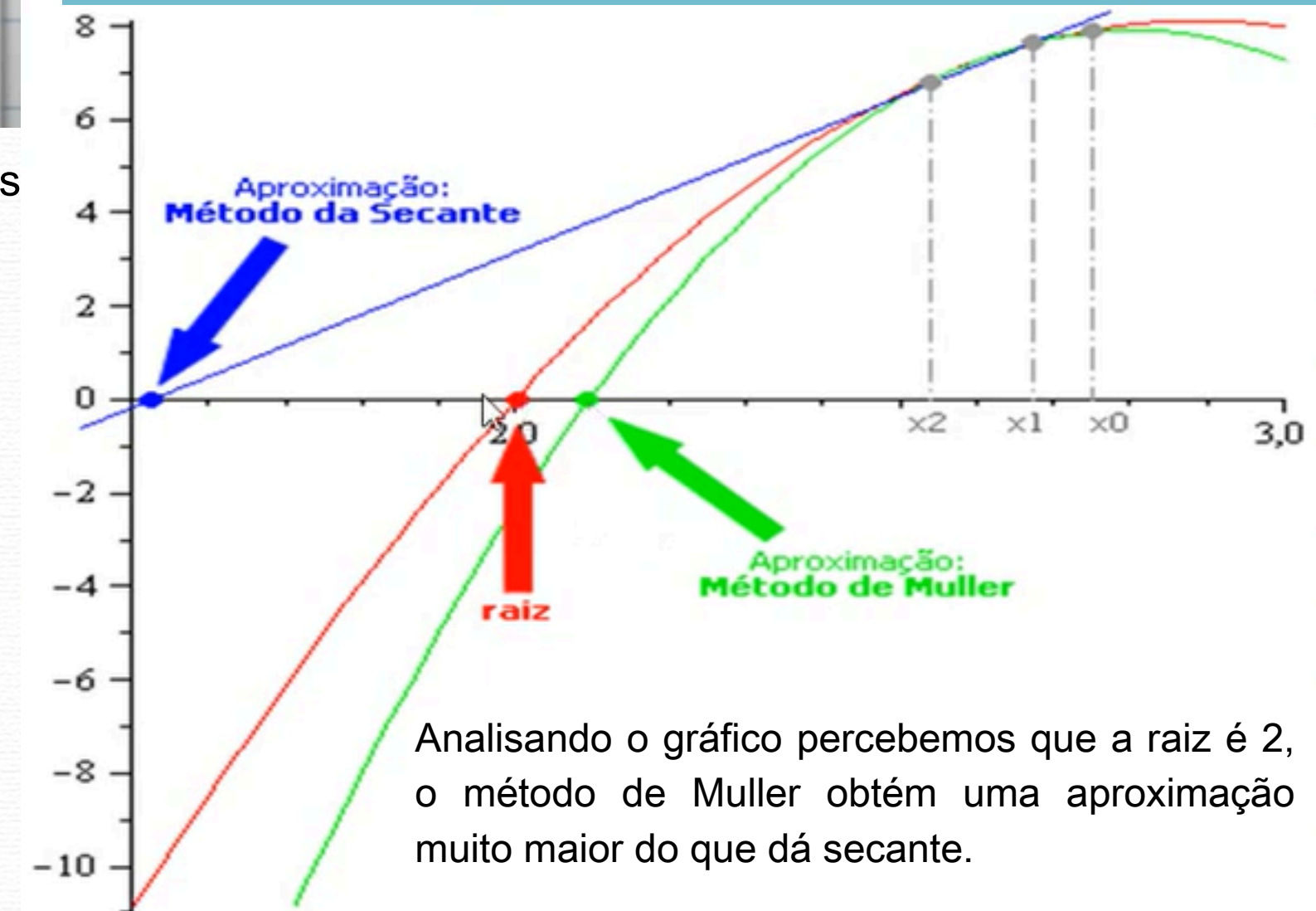
# Comparação



Na Secante temos dois pontos passando por uma reta.

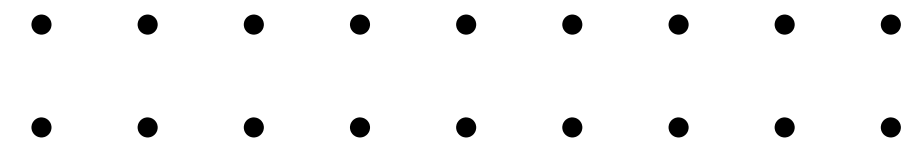
Já em Muller temos três pontos passando por uma parábola.

## ANÁLISE DO GRÁFICO





## Fundamentação Teórica



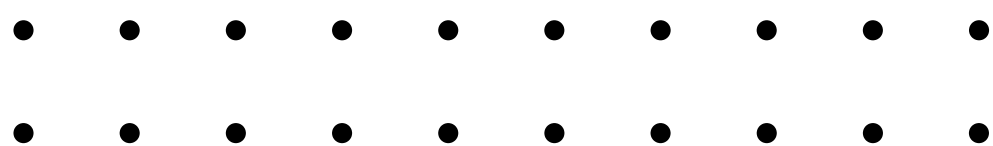
O Método de Muller é uma generalização do método da secante, que por sua vez é uma variação do método de Newton. Enquanto a secante utiliza uma interpolação linear com dois pontos, Muller usa três pontos para construir uma parábola que se ajusta à função.

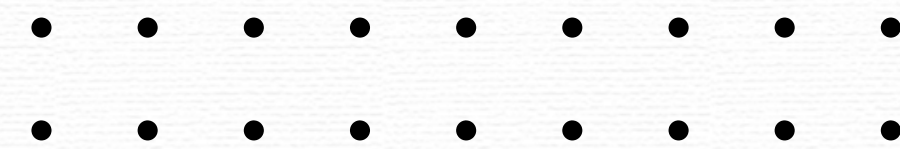
A equação da parábola é dada por:

$$f_i = a(x - x_i)^2 + b(x - x_i) + c$$

Queremos essa parabola passe por três pontos:

$$[x_0, f(x_0)]; [x_1, f(x_1)] \text{ e } [x_2, f(x_2)]$$



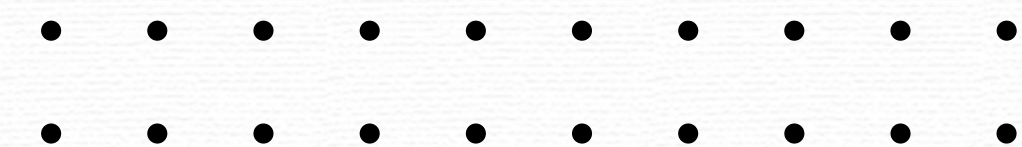


Para determinar os coeficientes **a**, **b**, e **c** se substitui os três pontos na formula quadrática ( uma equação para avaliar cada ponto) :

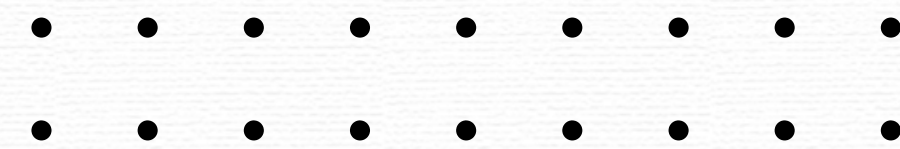
$$\begin{aligned} (1) \quad f(x_0) &= a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c \\ (2) \quad f(x_1) &= a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c \\ (3) \quad f(x_2) &= a(x_2 - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c \end{aligned}$$

Ao avaliar o ponto  $X_2$  equação quadrática temos:

$$f(x_2) = c$$



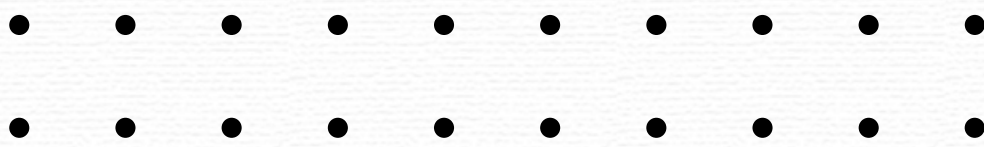




Esse valor é substituído na equação (1) (2) para termos duas equações com duas incógnitas :

$$(4) \quad f(x_0) - f(x_2) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2)$$

$$(5) \quad f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2)$$





• • • • • • • • •  
• • • • • • • • •

Para determinar os coeficientes **a** e **b** restantes, se estabelecem relações para facilitar o cálculo:

$$h_0 = x_1 - x_0$$

$$h_1 = x_2 - x_1$$

$$\delta_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\delta_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Eles são substituídos nas equações (4) e (5) para achar essas novas equações:

$$(h_0 + h_1)b - (h_0 + h_1)^2a = h_0\delta_0 + h_1\delta_1$$

$$(h_1)b - (h_1)^2a = h_1\delta_1$$

• • • • • • • • •  
• • • • • • • • •



Em resumo:

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 - h_0}$$

$$b = a \cdot h_1 + \delta_1$$

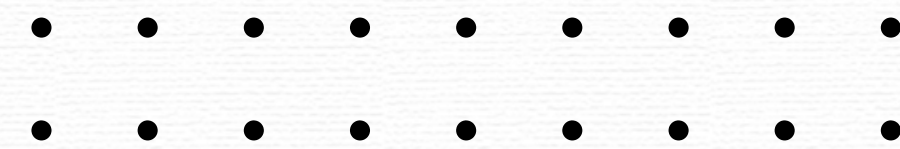
$$c = f(x_2)$$

Uma vez encontrados os coeficientes, substitui-se na equação quadrática para determinar o valor da raiz:

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Vai depender  
do sinal de  
"b"





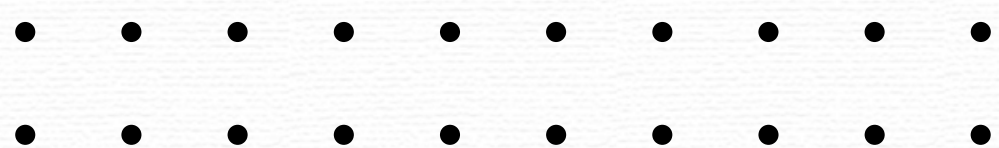
Para encontrar o erro de aproximação utiliza-se :

$$Ea = \left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| \times 100\%$$

Com esse método é possível encontrar raízes reais e complexas:

$$\left| b + \sqrt{b^2 - 4ac} \right| > \left| b - \sqrt{b^2 - 4ac} \right|$$

No método de **Muller** se escolhe o sinal que **coincida** com o sinal de “**b**” , este resultado adotado fornece o maior denominador, que dará a raiz estimativa mais proxima de  $X_2$ .





## Exemplo

Vamos aplicar o método de muller para resolver a seguinte equação:  $e^{-x} - x = 0$   
(com pelo menos duas iterações).

### Passo 1

Definir a função:  $f(x) = e^{-x} - x$

Observamos que a função é contínua no conjunto dos números reais e se dermos valores podemos notar que:

$$f(0) = 1 > 0$$

$$f(1) = e^{-1} - 1 < 0$$

Teorema de Bolzano:

Sendo  $f(x)$  contínua em um intervalo  $[a,b]$ , se  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , então existe pelo menos um ponto  $x = \xi$  entre  $a$  e  $b$  que é zero de  $f(x)$ .

Portanto pelo teorema de Bolzano existe uma solução na equação no intervalo  $[0,1]$



## Exemplo

Passo 1 – Isolamento (Teorema de Bolzano):  $f(x) = e^{-x} - x$

Testamos dois valores:

- $f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$
- $f(1) = e^{-1} - 1 \approx 0.3679 - 1 = -0.6321 < 0$

Passo 2 – Para achar o  $X_2$ , basta fazer a média entre os dois pontos já encontrados (0,1)

Estimar o terceiro ponto, pegando a média temos:

$$x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{0 + 1}{2} = 0.5$$

- $X_0 = 0$
- $X_1 = 1$
- $X_2 = 0.5$



## Exemplo

Passo 3 – Calcular h's e  $\Delta$ 's , seguindo as formulas do metodo de muller.

$$h_0 = x_1 - x_0 = 1, \quad h_1 = x_2 - x_1 = -0.5$$

$$\delta_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \approx \frac{-0.6321 - 1}{1} = -1.6321$$

$$\delta_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \approx \frac{0.1065 - (-0.6321)}{-0.5} = -1.4773$$



## Exemplo

Passo 4 – Calcular os coeficientes da parábola, com os dados já encontrados.

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0} = \frac{-1.4773 - (-1.6321)}{-0.5 + 1} = -0.10321$$

$$b = a \cdot h_1 + \delta_1 = -0.10321 \cdot (-0.5) + (-1.4773) = -1.4257$$

$$c = f(x_2) = 0.1065$$



## Exemplo

Passo 5 – Calcular  $x_3$

Usando a fórmula:

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$x_3 = 0.5 + \frac{-2 \cdot 0.1065}{-1.4257 + \sqrt{(-1.4257)^2 - 4 \cdot (-0.10321) \cdot 0.1065}} \approx \boxed{0.5743}$$

Como o  $b$  é negativo, o sinal será negativo também

$$b < 0$$



# Exemplo

Iteração 2 – Atualizar pontos:

Agora:

- $x_1 = 1$
- $x_2 = 0.5$
- $x_3 = 0.5743$

Passo 3:

$$h_1 = x_2 - x_1 = -0.5, \quad h_2 = x_3 - x_2 = 0.0743$$
$$\delta_0 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -1.4773, \quad \delta_1 = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = -1.5845$$



## Exemplo

Passo 4: Com os dados já encontrados, acharemos os coeficientes da parábola.

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_2 + h_1} = -0.1867$$

$$b = a \cdot h_2 + \delta_1 = -1.5984, \quad c = f(x_3) = -0.0111$$

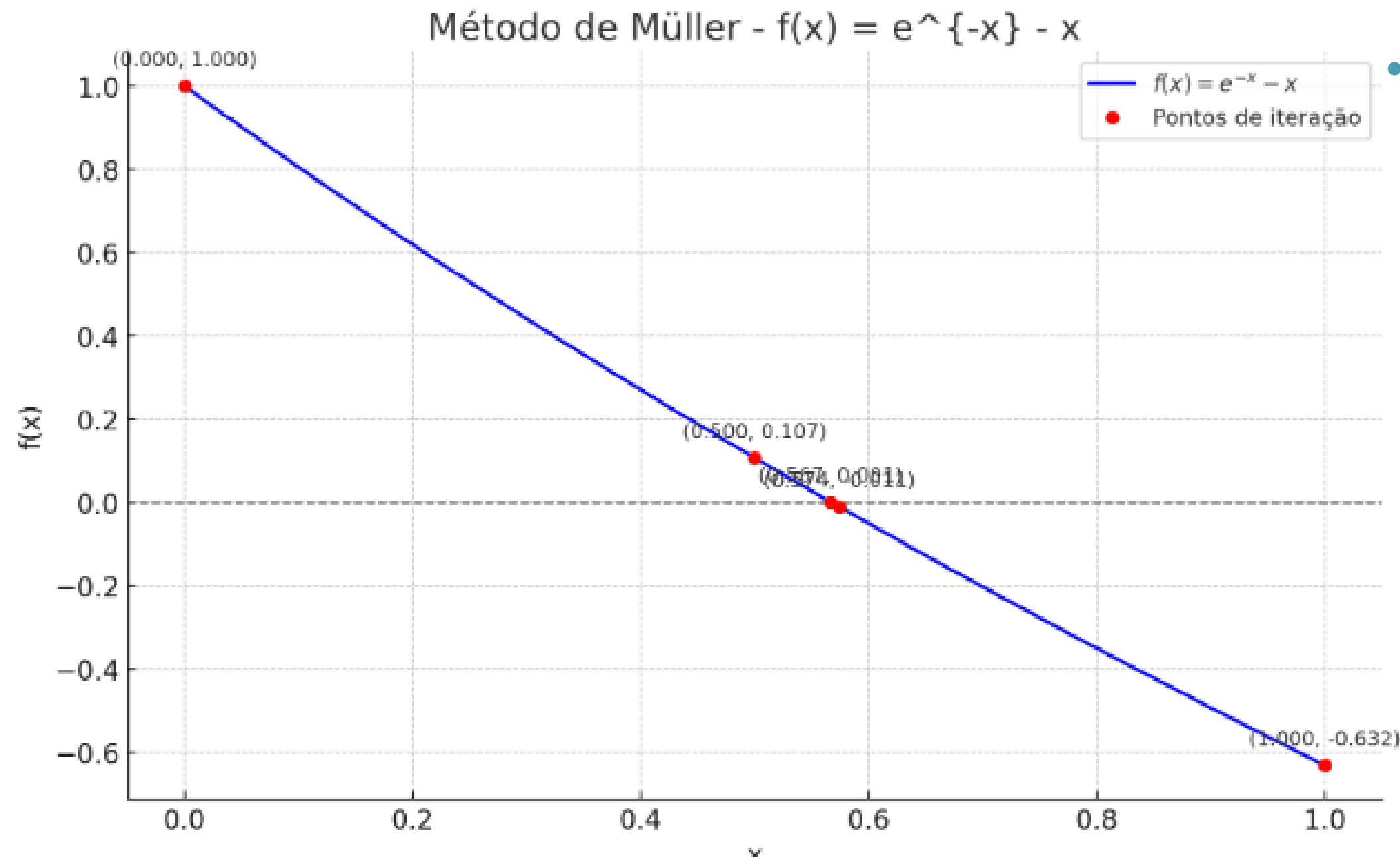
Passo 5: Determinar valor ( $x_4$ ):

$$x_4 = x_3 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \Rightarrow \boxed{x_4 \approx 0.5667}$$

- **1ª iteração:**
- $x_2 = 0.5$
- $x_3 \approx 0.5743$
- **2ª iteração:**
- $x_4 \approx 0.5667$



# Exemplo



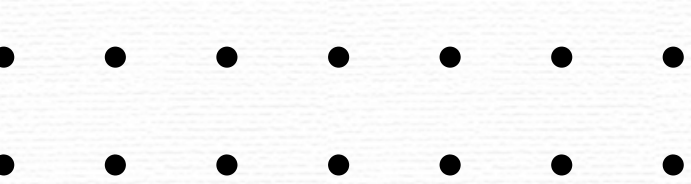
$$f(x) = e^{-x} - x$$

- Os pontos destacados em vermelho representam os valores usados nas iterações:

- $x_0 = 0$
- $x_1 = 1$
- $x_2 = 0.5$
- $x_3 = 0.57432$
- $x_4 = 0.56673$

Podemos ver que os pontos vão se aproximando da raiz da equação — onde a função cruza o eixo x, ou seja, onde  $f(x)=0$





## Vantagens do Método

- Não requer cálculo de derivadas .
- Pode encontrar raízes complexas.
- Tem boa taxa de convergência.

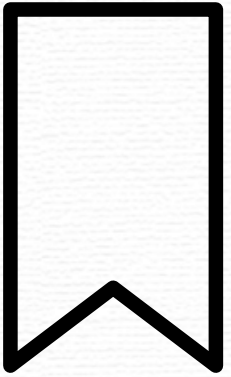
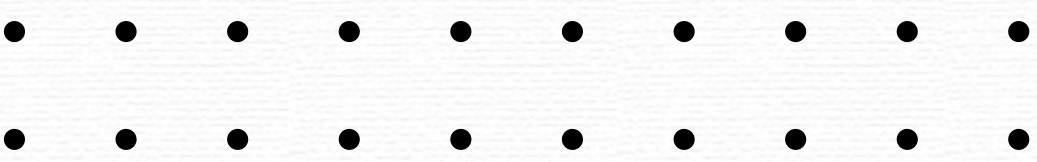


## Conclusão

O Método de Muller é uma técnica eficaz para encontrar raízes de funções, especialmente útil quando as derivadas são difíceis de calcular ou quando se buscam raízes complexas. Sua fundamentação teórica reside na aproximação da função por parábolas e na utilização das raízes dessas parábolas como aproximações para as raízes da função original.







# Referências

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. Análise Numérica. 9. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011. Acessado em 2 de Maio de 2025.

OLIVEIRA, Aristeu Silveira de. Cálculo Numérico: Aprendizado com o uso do Scilab. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. Acessado em 2 de Maio de 2025..

