

Método de Newton-Raphson

Luís Fernando Vila Branca Vaz
Dieno Gabriel Leite da Silva
Larissa Prates Souza

7 de maio de 2025

O método de Newton-Raphson é um dos métodos mais usados para encontrar raízes de funções reais $f(x) = 0$, ou seja, valores de x que tornam a função igual a zero.

Isaac Newton (1643 - 1727)

- Por volta de 1669, Newton desenvolveu um método para encontrar raízes de equações (chamadas de “zeros de funções” hoje), mas só publicou informalmente.
- Seu foco era resolver equações polinomiais e aplicar isso em problemas físicos.
- O método dele era um pouco mais algébrico e envolvia aproximações sucessivas com frações e derivadas.

Joseph Raphson (1648 – 1715)

- Em 1690, publicou o livro "Analysis Aequationum Universalis", onde apresentou uma versão simplificada e mais direta do método de Newton.
- Ao contrário de Newton, Raphson descreveu o método de forma iterativa e algébrica, como usamos hoje.

Newton aplicava o método a polinômios e utilizava uma abordagem baseada em séries. Seu foco era encontrar uma raiz x de uma equação da forma $f(x) = 0$ supondo uma aproximação inicial $x = x_0 + \epsilon$. Depois, ele expandia a função em série de Taylor e eliminava termos de ordem superior. O maior problema deste método é que a notação era pesada e exigia um conhecimento mais avançado de cálculo e álgebra.

Em 1690, Raphson publicou o método em um livro com foco em resolver equações numéricas, sem depender de séries de Taylor ou aproximações infinitesimais. Ele considerava uma forma iterativa direta baseada na tangente da função, chegando mais perto da forma moderna. Raphson generalizou o método para qualquer função, não apenas polinômios, e o descreveu como um processo iterativo.

Ponto inicial

Se você tem uma função complicada e quer saber onde ela cruza o eixo x , você pode começar com um palpite inicial x_0 e ir melhorando esse palpite repetidamente, usando a reta tangente da função naquele ponto.

Método de Newton-Raphson

A fórmula no método é:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Onde:

x_n é a aproximação atual;

$f(x_n)$ é o valor da função em x_n ;

$f'(x_n)$ é o valor da derivada da função em x_n ;

x_{n+1} é a nova aproximação, mais próxima da raiz.

Demonstração

O objetivo é encontrar um x de modo que $f(x) = 0$. Expandindo $f(x)$ por Taylor em torno de um ponto inicial x_0 , obtemos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2} + \dots$$

Se x estiver muito próximo de x_0 então os termos de grau mais alto se aproximam de zero. Portanto

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \implies 0 \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Logo

$$x \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Utilizando a fórmula de modo iterativo, obtemos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

onde obtemos uma reta tangente cada vez mais próxima da reta tangente a $f(x) = 0$.

Critérios de Convergência

O método de Newton-Raphson é muito rápido, pois precisa de menos iterações que o método da bisseção, mas para isso acontecer, algumas condições precisam ser atendidas:

- f precisa ser diferenciável no intervalo onde o método será aplicado.
- $f'(x)$ precisa ser diferente de zero no intervalo para que não ocorra uma divisão por zero.
- O valor inicial x_0 precisa ser razoável, caso contrário o método pode convergir para uma raiz indesejada ou divergir para o infinito.

- Convergência quadrática: O erro entre a aproximação e a raiz verdadeira diminui muito rápido a cada iteração (em geral, dobra o número de casas corretas a cada passo, se tudo estiver ideal).
- Poucos cálculos por iteração: Só precisa calcular a função $f(x)$ e sua derivada $f'(x)$.
- Método simples: Usa conceitos básicos de cálculo (reta tangente), então é teórico e prático.

- Precisa da derivada: Se a derivada for difícil de calcular, o método complica.
- Pode falhar: Se o chute inicial for ruim, ou se $f'(x) = 0$, o método pode divergir.
- Não garante raiz global: Ele pode "cair" em uma raiz local (não necessariamente a raiz que queremos) se existirem várias.

Exemplo 1:

Encontre a a raiz da função $f(x) = x^2 - 2$
(Raiz esperada: $\sqrt{2} \approx 1.4142$)

Iteração	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	1.0000	-1.0000	2.0000	1.5000
1	1.5000	0.2500	3.0000	1.4167
2	1.4167	0.0069	2.8333	1.4142
3	1.4142	0.0000	2.8284	1.4142

Exemplo 2:

Encontre a raiz da função $f(x) = \cos(x) - x$
(Raiz esperada: $x \approx 0.7391$)

Iteração	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	1.0000	-0.4597	-1.8415	0.7504
1	0.7504	-0.0187	-1.6816	0.7396
2	0.7396	-0.0004	-1.6732	0.7391
3	0.7391	-0.0000	-1.6730	0.7391

Exemplo 3:

Encontre a raiz da função $f(x) = e^{-x} - x$

(Raiz esperada: $x \approx 0.5671$)

Iteração	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	0.5000	0.1065	-1.6065	0.5663
1	0.5663	0.0013	-1.5676	0.5671
2	0.5671	0.0000	-1.5671	0.5671
3	0.5671	0.0000	-1.5671	0.5671

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. Análise Numérica. 9ª edição. Cengage Learning, 2011.

CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. Métodos Numéricos para Engenharia. 7ª edição. McGraw-Hill Brasil, 2016.