

Trabalho - Cálculo numérico

MPF – Método do Ponto Fixo

LARA CRISTINI RODRIGUES CANDIDO


NATHALIA GONÇALVES RIBEIRO

Introdução

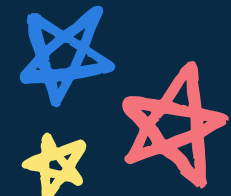
O MÉTODO DO PONTO FIXO É UMA TÉCNICA NUMÉRICA PARA ENCONTRAR SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES, ESPECIALMENTE EQUAÇÕES NÃO LINEARES.



- O MÉTODO DO PONTO FIXO É UM MÉTODO ITERATIVO PARA RESOLVER EQUAÇÕES DO TIPO $F(x)=0$.
- A IDEIA É TRANSFORMAR A EQUAÇÃO ORIGINAL EM UMA FORMA EQUIVALENTE:
$$x=G(x)$$
- O VALOR QUE SATISFAZ ESSA EQUAÇÃO É CHAMADO DE PONTO FIXO.
- APLICADO EM DIVERSAS ÁREAS: MATEMÁTICA, ENGENHARIA, COMPUTAÇÃO ETC.



Ponto fixo de uma função G



DEFINIÇÃO :

Um ponto fixo de uma função g é um valor x tal que:
 $g(x)=x$



Geometricamente, é o ponto onde o gráfico de $g(x)$ intercepta a reta $y=xy$



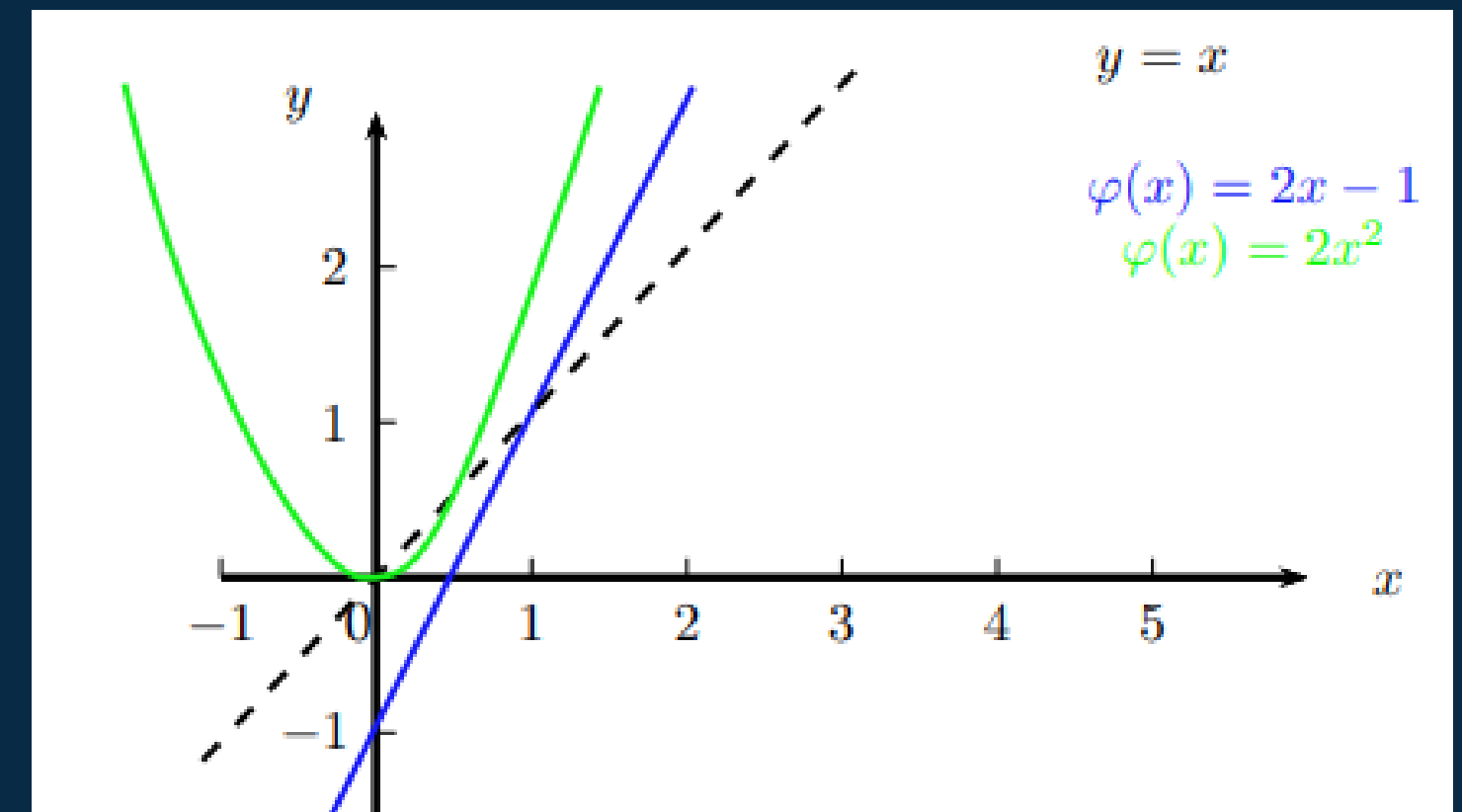
A busca por uma raiz de $f(x)$ pode ser convertida em busca de um ponto fixo.

Para determinar os pontos fixos de uma função G é suficiente encontrar as interseções da função com a bissetriz $y = x$, ou seja resolver a equação $g(x) = x$.

Assim por exemplo a função $g(x) = 2x$ tem como ponto fixo $\xi = 0$, porque de $2x = x$ obtemos $x = 0$.

Em vez $g(x) = 2x - 1$ tem como ponto fixo $\xi = 1$, porque $2x - 1 = x$ implica que $x = 1$.

Não sempre o ponto fixo é o único: $g(x) = 2x^2$ tem dois pontos fixos $\xi_1 = 0$ e $\xi_2 = 1/2$.



- Resolver $f(x)=0$ pode ser difícil diretamente.
- Estratégia: reescrever a equação como $x=g(x)$, de forma equivalente.
- A raiz de $f(x)$ será o ponto fixo de $g(x)$.

Exemplo teórico:

$$f(x)=x^2-4 \Rightarrow x=4 \Rightarrow g(x)=\sqrt{4}$$



Método iterativo

UM MÉTODO ITERATIVO DO TIPO $x_{N+1} = G(x_N)$ É DITO MÉTODO DO PONTO FIXO, OU TAMBÉM MÉTODO ITERATIVO SIMPLES.

O MÉTODO DE NEWTON SERÁ DO PONTO FIXO. É FÁCIL CONSTRUIR UM MÉTODO DO PONTO FIXO, DADA UMA QUALQUER FUNÇÃO $G(x)$ E UM PONTO x_0 PODE SEMPRE CONSTRUIR O MÉTODO:

$$x_1 = G(x_0) \rightarrow x_2 = G(x_1) \rightarrow \cdots \quad x_N = G(x_{N-1}) \rightarrow x_{N+1} = G(x_N) \rightarrow \cdots$$

POREM PODE NÃO CONVERGIR



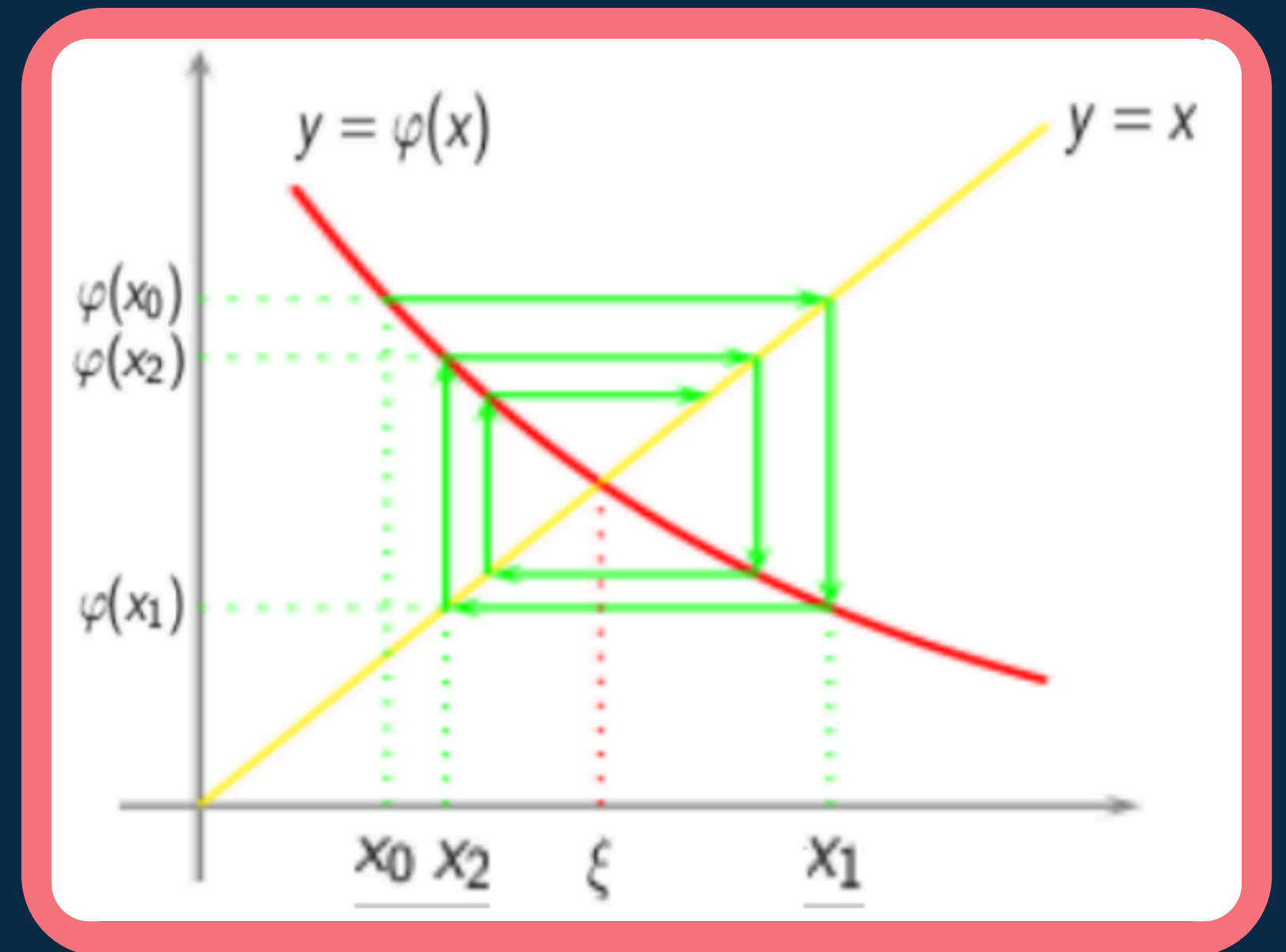
Fundamento Teórico

- * Começamos com um valor inicial x_0
- * Aplicamos a fórmula iterativa:
 $x_{n+1} = g(x_n)$
- * A sequência gerada deve se aproximar de um ponto fixo:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Rightarrow g(x) = x$

Determinação gráfica dos métodos do ponto fixo

Dado x_0 e a função g temos que $x_1 = g(x_0)$, x_1 é portanto achado no eixo das x como a abscissa da interseção da reta $y = g(x_0)$ com a bissetriz $y = x$.

De x_1 computamos $g(x_1)$ e determinamos x_2 como a abscissa da interseção de $y = g(x_1)$ com a bissetriz



Condições de Convergência

$g(x)$ seja contínua em
um intervalo I

$g(I) \subset I$: a função leva o
intervalo em si mesmo.

$g(x)$ seja contrativa:
 $0 < k < 1$ tal que:
 $|g(x) - g(y)| \leq k |x - y|$

Teorema do Ponto Fixo de Banach

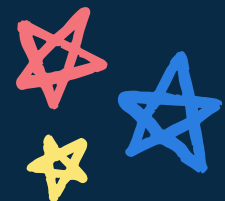


(Versão intuitiva):

Se uma função g é contínua e contrativa em um intervalo fechado $[a,b]$, então:

- Existe um único ponto fixo nesse intervalo.
- A sequência $x_{n+1} = g(x_n)$ converge para ele.

Esse teorema é a base matemática da segurança do método.







A decorative border surrounds the slide, featuring various colorful geometric shapes and patterns. At the top, there is a red square, a blue wavy line, a yellow diamond, a red spiral, a green triangle, a red concentric arc, a pink semi-circle, and a blue L-shape. At the bottom, there is a red wavy line, a yellow spiral, a blue L-shape, a red wavy line, a green flower-like shape, a yellow oval, and several red and yellow stars.

Critério de Parada

- COMO NÃO FAZEMOS INFINITAS ITERAÇÕES, USAMOS UM CRITÉRIO DE PARADA: $|x_{N+1} - x_N| < \epsilon$ ONDE ϵ É A TOLERÂNCIA DE ERRO DESEJADA (EX: 10^{-5}).
- PODE-SE TAMBÉM LIMITAR O NÚMERO MÁXIMO DE ITERAÇÕES.



Limitações

-  Convergência não é garantida para qualquer $g(x)$.
-  Se $|g'(x)| \geq 1$, o método pode divergir.
-  Convergência pode ser lenta.
-  A escolha do valor inicial x_0 também influencia muito o resultado.

1 - exemplo

EQUILÍBRIO DE FORÇAS EM UM ARCO DE CONCRETO

EQUAÇÃO ORIGINAL:

A FÓRMULA DE THRUST LINE (LINHA DE PRESSÃO) PARA UM ARCO PODE SER USADA PARA DETERMINAR A FORÇA HORIZONTAL H. UMA SIMPLIFICAÇÃO DÁ A EQUAÇÃO:

$$X = E^{-X}.$$

ESSE TIPO DE EQUAÇÃO APARECE AO ESTUDAR EQUILÍBRIO EM SISTEMAS COM ELEMENTOS CURVOS E ESTABILIDADE.



EQUAÇÃO QUE VAMOS
UTILIZAR

$$x = e^{-x}$$

Resolução

REESCREVEMOS A
EQUAÇÃO COMO $x = G(x)$

$$g(x) = e^{-x}$$

ESCOLHEMOS UM VALOR
INICIAL (CHUTE):

$$x_0 = 0.5$$

ITERAMOS:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Método do Ponto Fixo para

$$x = e^{-x}$$

Iteração	x_n	$g(x_n) = e^{-x_n}$
0	0,5000	0,6065
1	0,6065	0,5452
2	0,5452	0,5796
3	0,5796	0,5601
4	0,5601	0,5711
5	0,5711	0,5649
6	0,5649	0,5684
7	0,5684	0,5664
8	0,5664	0,5675
9	0,5675	0,5669

2 - exemplo

FATOR DE SEGURANÇA EM TALUDE

EM ESTABILIDADE DE TALUDES, A EQUAÇÃO DE BISHOP (SIMPLIFICADA PARA SOLOS HOMOGÊNEOS SATURADOS) PODE LEVAR A UMA EQUAÇÃO NÃO LINEAR PARA O FATOR DE SEGURANÇA F:
EQUAÇÃO SIMPLIFICADA:

$$F = \tan^{-1}(1 + 0,866F)$$

EQUAÇÃO QUE VAMOS
UTILIZAR

$$F = \tan^{-1}(1 + 0,866F)$$

Resolução

REESCREVEMOS A
EQUAÇÃO COMO $F = G(F)$

$$g(F) = \tan^{-1}(1 + 0,866F)$$

ESCOLHEMOS UM VALOR
INICIAL (CHUTE):

$$F_0 = 1$$

ITERAMOS:

$$f_{n+1} = g(f_n)$$

Método do Ponto Fixo para Fator de Segurança $F = \tan^{-1}(1 + 0,866F)$ =

Iteração	F_n	$g(F_n) = \tan^{-1}(1 + 0,866F_n)$
0	1,0000	1,4373
1	1,4373	1,4875
2	1,4875	1,4967
3	1,4967	1,4983
4	1,4983	1,4986
5	1,4986	1,4986

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Análise Numérica*. 9. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

MENEZES, F. A. de; OLIVEIRA, L. G. de. *Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, N. K. *Cálculo Numérico: aprendizagem com apoio de computadores*. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2005.

FERREIRA, J. A.; ALMEIDA, J. C. *Métodos Numéricos para Engenharia*. LTC, 2013.