Cálculo Numérico

Um guia prático com Python

Prof. Dr. Rogério Vargas[1]

[1]Centro de Estudos do Mar
Universidade Federal do Paraná

2025

Vamos nos conhecer?

Olá! Bem-vindo a componente **Cálculo Numérico**. Este material contém um direcionamento das aulas realizadas.

O professor

- Apresentação no prezi. Clique aqui.
- Pesquisa atual Clique aqui
- Imagens LiDAR

Aprovação

Frequência e avaliações.

Mas afinal, o que veremos na componente?

Python

Iremos implementar várias funções utilizando a linguagem de programação Python a partir da versão 3.

- Python.org (oficial)
  - Google Colab
  - OnlineBGD
  - Replit

Conteúdo das Aulas I

- Python

1. Por que estudar Cálculo Numérico?
   - Exemplos
   - Objetivos
   - Grave isso
2. Aritmética de Ponto Flutuante
3. Ambiente de programação Google Colab
4. Aritmética de Ponto Flutuante + Aplicações
5. Zero Funções
6. Zero Funções
7. Funções em Python
8. Sistemas Lineares
9. Sistemas Lineares + Aplicações
10. Sistemas Lineares

Conteúdo das Aulas II

Encontro 3:
Por que estudar Cálculo Numérico?

Exemplos

- Foguete Ariane 5 (veja o vídeo)
  - Ano 1996
  - US$ 500 mi (foguete)
  - US$ 7 bi (projeto)
  - *Overflow foi a causa*
- Código em Python

```python
# Soma de pontos flutuantes
a = 0.1
b = 0.2
c = a + b
print(c)
# Output: 0.30000000000000004
```

Objetivos

- Reconhecer a importância do cálculo numérico
- Conhecer princípios básicos usados em cálculo numérico.
- Reconhecer problemas que podem ser resolvidos por cálculo numérico.
- Estabelecer fases para a resolução de problemas reais.

Objetivos

- Compreender como os números são representados nas calculadoras e computadores e como são realizadas as operações numéricas nestes sistemas digitais.
- Entender o que são métodos numéricos de aproximação, como e por que utilizá-los.
- Identificar problemas que requerem o uso de técnicas numéricas para a obtenção de sua solução.

Objetivos

- Conhecer e aplicar os principais métodos numéricos para a solução de problemas clássicos. Ex.: obter zeros reais de funções reais, resolver sistemas de equações lineares, fazer interpolação polinomial, ajustar curvas e fazer integração numérica
- Estimar e analisar os erros obtidos devido à aplicação de métodos numéricos e propor soluções para minimizá-los e se possível, eliminá-los

Grave isso

Em um método numérico, uma solução aproximada é obtida de forma construtiva:

1. Partindo de aproximações iniciais, vão sendo construídas novas aproximações até que uma aproximação considerada "boa" seja obtida.
2. Um método numérico pode ser escrito em forma de algoritmo com as operações (ou grupos de operações), podendo ser executadas repetidamente.

Cálculo numérico

Considerações finais

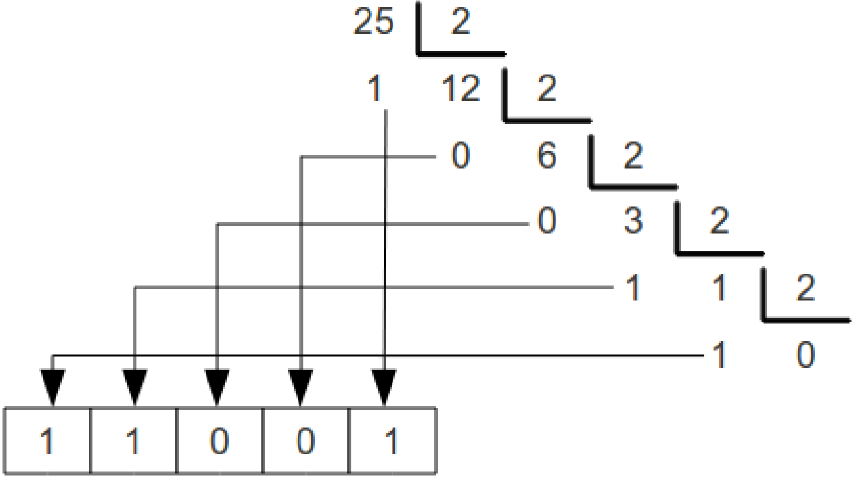
- As soluções numéricas dependem da qualidade do modelo matemático, assim como do próprio método utilizado para a solução.
- Existem vários métodos que resolvem o mesmo problema, estudaremos alguns deles para comparar a qualidade, defeitos e aplicabilidade.

Encontro 4: Aritmética de Ponto Flutuante

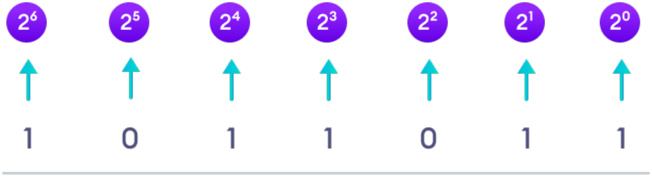
Objetivos

- Conversões entre bases.
- Notação científica.
- Arredondamento e erros.
- Aritmética de ponto flutuante.
- Compreender os erros nas conversões.
- Compreender o código em Python de erro de arredondamento.

Conversão de decimal para binário



Conversão de binário para decimal



$$2^6 \times 1 + 2^5 \times 0 + 2^4 \times 1 + 2^3 \times 1 + 2^2 \times 0 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1 = 91$$

Conversão de bases

Converta os seguintes valores da sua base para binário ou decimal

1. $x = 2_{(10)}$
2. $x = 123_{(10)}$
3. $x = 10110_{(2)}$
4. $x = 1111_{(2)}$
5. $x = 1111_{(10)}$
6. $x = 27,75_{(10)}$
7. $1100,01_2$

Notação científica

Notação científica é uma forma de expressar números muito grandes ou muito pequenos de maneira mais simplificada.

Definição:
Formalmente, um número está em notação científica quando é representado como o produto de um número real (a), tal que $(1 \leq |a| < 10)$, e uma potência de 10, escrita como (10^n), onde (n) é um número inteiro. A forma geral é:

$$a \cdot 10^n$$

onde a é a mantissa e n o expoente. Sendo, $1 \leq a < 10$ ou $-10 < a \leq -1$ e n um número inteiro.

Notação científica

Converta de notação científica para decimal:

1. $x = 1,2 \cdot 10^5$
2. $x = 9,2 \cdot 10^{-5}$
3. $x = -7,2123 \cdot 10^7$

Notação científica

Converta de decimal para notação científica:

1. 1250000
2. 500000000000
3. $0,0000256$
4. $-0,0000003$
5. $0,0100003$

Representação de um número

A representação de um número pelo computador é dada por:

$$\pm 0.d_1 d_2 d_3 ... d_t \cdot \beta^n$$

onde d_1 até d_t é a mantissa, β é base e n é o expoente. Sendo:

- $d_1 \neq 0$
- $n \in [m, M]$ no qual m é o limite inferior e M é o limite superior do expoente.

Conversão de um número

Representação

$$x = \pm 0.d_1 d_2 d_3 ... d_t \cdot \beta^n$$

1. $x = 235,89_{(10)}$
2. $x = 101,01_{(2)}$
3. $x = 0,000875_{(10)}$

Aritmética de ponto flutuante

Operação

$$F(B, t, m, M)$$

onde:

- B é a base.
- t é o número de dígitos.
- m é limite inferior do expoente.
- M é o limite superior do expoente.

Arredondamento e erros

> **Definição: Arredondamento por Truncamento**
> Se desejamos arrendondar utilizando DIGSE= 3, devemos simplesmente ignorar os dígitos restantes após o terceiro significativo.

a saber que DIGSE significa DIGitos Significativos Exatos.

Arredondamento e erros

Definição: Arredondamento por aproximação

Se desejamos arrendondar utilizando DIGSE= 3, devemos olhar para o dígito seguinte a esse, ou seja, o quarto, o qual usaremos a notação d_4. Se esse dígito for entre 0 e 4 não mudamos o terceiro dígito d_3, porém se for entre 5 e 9 adicionamos uma unidade ao terceiro dígito.

Arredondamento e erros

Exemplo

Represente os números $x_1 = 0,437$, $x_2 = 0,144$, $x_3 = -0,495$ e $x_4 = 0,314159265 \cdot 10^1$ com dois dígitos significativos por truncamento e arredondamento.

Arredondamento e erros

Underflow

Ocorre quando o resultado de uma operação de ponto flutuante é menor em magnitude (ou seja, mais próximo de zero) do que o menor valor representável como um número de ponto flutuante normal no tipo de dados de destino. Isso significa que o resultado é tão pequeno que não pode ser adequadamente representado na memória do computador.

$$[x < \text{fmin}_N]$$

onde:

- x é o resultado da operação.
- (fmin_N) é o menor valor positivo normal representável em ponto flutuante.

É importante considerar essas limitações ao trabalhar com cálculos numéricos em ponto flutuante.

Arredondamento e erros

Overflow

Ocorre quando o resultado de uma operação de ponto flutuante é maior em magnitude do que o maior valor representável como um número de ponto flutuante normal no tipo de dados de destino. Isso significa que o resultado é tão grande que não pode ser adequadamente representado na memória do computador.

$$x > \mathrm{fmax}_N]$$

onde:

- x é o resultado da operação.
- (fmax_N) é o maior valor positivo normal representável em ponto flutuante.

É importante considerar essas limitações ao trabalhar com cálculos numéricos em ponto flutuante.

Código-fonte de erro de arredondmento

O código-fonte em Python mostra um exemplo de erro ocasionado por aritmética de ponto flutuante.

Encontro 5: Ambiente de programação Google Colab

Google Colab

Conta Google

- Criar conta e/ou;
- Logar na conta;
- Acessar o Google Colab;
- Seguir instruções da aula;
- Pratique.

Encontro 6: Aritmética de Ponto Flutuante + Aplicações

Tipos de erros

Vamos considerar basicamente dois tipos de erros: Absoluto e Relativo. Estas definições nos auxiliam no estudo da tolerância na aplicação de algum método numérico, bem como na sua convergência, que veremos mais adiante.

1. Absoluto
2. Relativo

Tipos de erros

Definição:
Erro absoluto EA,
$$EA(x) = |x - \bar{x}|$$
onde x tomamos como o valor exato e $x - \bar{x}$ a aproximação para o mesmo.

Tipos de erros

Definição:
Erro relativo ER,

$$ER(x) = \frac{|x - \bar{x}|}{|x|} = \frac{EA}{|x|}$$

Nota-se que o erro relativo é uma medida adimensional. Este conceito torna o erro relativo uma proporção com relação ao valor real.

Tipos de erros

Exemplo

Sejam $x = 123456,789$ e sua aproximação $\bar{x} = 123000$. O erro absoluto é

$$|x - \bar{x}| = |123456,789 - 123000| = 456,789$$

e o erro relativo é

$$\frac{|x - \bar{x}|}{|x|} = \frac{|456,789|}{|123456,789|} = 0,00369999$$

ou ainda, 0,36%.

Aplicações

Converta para binário:

- 11
- 10
- 32
- 65
- 127
- 200
- 1401
- 4095

Converta para o sistema decimal:

- 10_2
- 11_2
- 111_2
- 10101_2
- 11110_2
- 11111_2
- 110010111_2
- 10000000001_2

Aplicações

Converta para notação científica:

- 15
- 123
- 325678
- -457
- 0,765
- 0,00000012
- -0,999900
- -893,999812

Converta para o sistema decimal:

- $1,5 \cdot 10^1$
- $28 \cdot 10^{-6}$
- $3,982 \cdot 10^1$
- $9,82 \cdot 10^3$
- $-1,982 \cdot 10^8$
- $-9,2 \cdot 10^2$
- $-7,8254 \cdot 10^{-7}$
- $-3,72319832 \cdot 10^{-4}$

Aplicações

Arredondamento:

- $0,1234 \cdot 10$ (DIGSE=3)
- $0,888888 \cdot 10$ (DIGSE=4)
- $0,3413 \cdot 10$ (DIGSE=2)
- $0,487 \cdot 10$ (DIGSE=1)
- $0,4231 \cdot 10$ (DIGSE=3)
- $0,1234674 \cdot 10$ (DIGSE=2)
- $0,12345 \cdot 10$ (DIGSE=4)
- $0,1234555552 \cdot 10$ (DIGSE=6)

Truncamento:

- $0,1234 \cdot 10$ (DIGSE=3)
- $0,888888 \cdot 10$ (DIGSE=4)
- $0,3413 \cdot 10$ (DIGSE=2)
- $0,487 \cdot 10$ (DIGSE=1)
- $0,4231 \cdot 10$ (DIGSE=3)
- $0,1234674 \cdot 10$ (DIGSE=2)
- $0,12345 \cdot 10$ (DIGSE=4)
- $0,1234555552 \cdot 10$ (DIGSE=6)

Aplicações

Calcule o erro relativo e o erro absoluto de uma área de um círculo, sabendo:

1. $R = 100m$
2. $\pi_1 = 3,14$
3. $\pi_2 = 3,141592$
4. $A = \pi * R^2$

Aplicações

Utilizando o Python e uma uma ferramenta de IA, faça os seguintes programas:

1. Exiba o maior número de casas decimais do π.
2. Faça um programa em Python, onde o usuário informe um número um número (inteiro) e o programa converta se for decimal para binário e vice-versa.
3. Faça um programa em Python que o usuário informe o número decimal e o programa exiba em notação científica. Faça também o processo inverso.

Encontro 7: Zero Funções

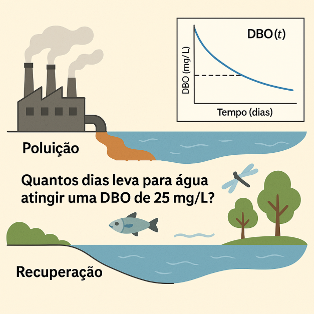
Objetivos

- O que é
- Funções de 1º, 2º e 3º grau.
- Métodos numéricos para determinação de zero funções
- Processo iterativo
- Gráfico em Python
- Método de Bolzano
- Método da bissecção
- Critério de parada
- Exemplo no Excel

Exemplo na EAS: Quanto tempo a água leva para se recuperar?

Quando uma indústria lança resíduos orgânicos em um rio, esses resíduos consomem o oxigênio dissolvido na água, prejudicando a vida aquática. Para avaliar esse impacto, os engenheiros usam uma medida chamada **Demanda Bioquímica de Oxigênio** (DBO).

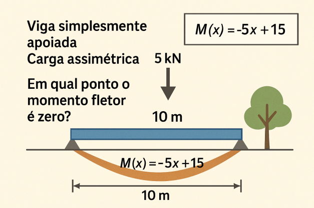
A DBO indica a quantidade de oxigênio necessária para decompor a matéria orgânica presente na água. Quanto maior a DBO, **pior está a qualidade da água**. Com o tempo, a natureza "limpa" esse poluente, e a DBO vai diminuindo até níveis aceitáveis.



Exemplo na EC: Cálculo de Esforços Internos em Vigas

Imagine uma viga de concreto usada para sustentar o teto de uma sala. Ela está apoiada nas duas extremidades. Agora, alguém coloca uma carga pesada — como um ar-condicionado — mais perto de um dos lados da viga.

Essa carga faz com que a viga se curve para baixo. Mas ela não se curva igualmente em todos os pontos: algumas partes estão mais forçadas que outras. Em algum lugar ao longo da viga, a estrutura está no seu ponto mais exigido.
Pergunta: **Como saber exatamente onde está esse ponto crítico?**



Zero Funções

O que é?

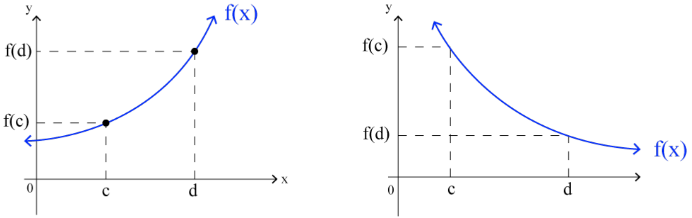
É onde a curva do gráfico intercepta o eixo x e $y = 0$. No ponto que é interceptado há uma raiz.

Funções de:

- Primeiro grau
- Segundo grau
- Terceiro grau

Função de primeiro grau

As funções do tipo $y = ax + b$ ou $f(x) = ax + b$, onde a e b assumem valores reais e $a \neq 0$ são consideradas funções do 1º grau.



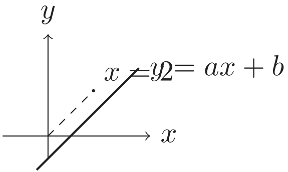
- A função é crescente quando $a > 0$ e;
- Decrescente quando $a < 0$.

Raiz de uma função de primeiro grau

Raiz é o valor de x que anula $f(x)$. Para calcular a função é necessário igualar a equação a zero.

$$f(x) = y = 0$$
$$f(raiz) = y = 0$$

$$f(x) = ax + b$$
$$ax + b = 0$$
$$ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{a}$$

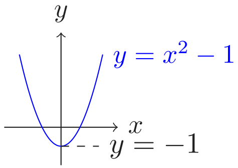


Raiz de uma função de segundo grau

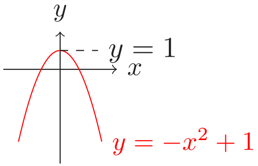
Raiz é o valor de x que anula $f(x)$. Para calcular a função é necessário igualar a equação a zero. Utilizando a fórmula de Bhaskara é possível encontras as raízes da função x' e x''.

Além disso, o valor do delta nos permite saber quantos zeros a função quadrática possuirá.

- $\Delta > 0$: duas raízes reais distintas;
- $\Delta = 0$: uma única raiz real;
- $\Delta < 0$: não possui raiz real.



(a) Parábola com concavidade para cima.



(b) Parábola com concavidade para baixo.

Figure 1: Gráficos de parábolas com concavidade para cima e para baixo

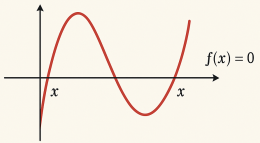
Exemplos

Pode-se observar os seguintes exemplos:

1. $f(x) = x - 3$
2. $f(x) = \frac{8}{3}x - 4$
3. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Zeros de Funções

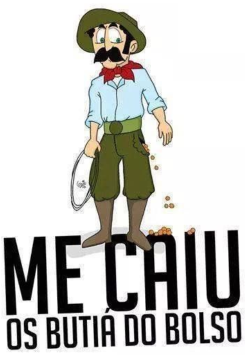
O objetivo é resolver a equação $f(x) = 0$, ou seja, encontrar os pontos onde o gráfico da função cruza o eixo x.



Exemplos

Porém, nem sempre é possível encontrar analiticamente a raiz de uma função, por exemplo:

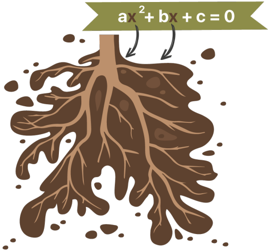
- $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$
- $sin(x) + e^x$
- $x + ln(x)$



Métodos numéricos para determinação de zeros de funções

A ideia central destes métodos é partir de uma **aproximação inicial** para a raiz e em seguida refinar essa aproximação através de um **processo iterativo**.

1. Isolar cada zero que se deseja determinar da função f em um intervalo $[a, b]$, sendo que cada intervalo deverá conter um e somente um zero da função f.
2. Calcular a raiz aproximada através de um processo iterativo até a precisão desejada.



Processo iterativo

Iteração
É o ato de iterar (repetir) uma função por um determinado período de tempo até que uma condição seja alcançada.

- Há uma ampla variedade de métodos numéricos que consistem em processos iterativos. Esses processos são definidos pela repetição de uma operação específica.
- A essência desse tipo de procedimento é realizar um cálculo específico repetidamente, de modo a obter, a cada iteração subsequente, um resultado mais refinado em comparação com o da iteração anterior.
- É fundamental ressaltar que em cada iteração, o resultado obtido na iteração anterior é utilizado como parâmetro de entrada para o cálculo subsequente.

Processo iterativo

Há vários aspectos comuns a todos os processos iterativos:

Estimativa inicial

Para iniciar um processo iterativo, é necessário possuir uma estimativa inicial do resultado do problema. Esta estimativa pode ser adquirida de várias maneiras, dependendo da natureza do problema.

Convergência

Para alcançar um resultado próximo do esperado, é crucial que a cada passo ou iteração, nosso resultado se aproxime cada vez mais do valor desejado.

Critério de parada

Não é viável continuar um processo numérico indefinidamente. É necessário interrompê-lo em algum momento. Determinar quando parar as iterações de um processo numérico é chamado de critério de parada, o qual varia conforme o problema em questão e a precisão desejada para obter a solução.

Processos iterativos

Há diversos métodos para encontrar os zeros de uma função:

1. Método da Bissecção;
2. Método do Ponto Fixo (MPF);
3. Método de Newton-Raphson;
4. Método da Secante;
5. Método de Muller;
6. Método de Brent.

Definição do Trabalho 1.

Trabalho 1

1. Formem duplas;
2. Definir o método numérico;
3. Tempo de apresentação de até 1 hora;
4. Ter fundamentação teórica;
5. Planilha com as iterações;
6. Função em Python com o método (deverá ser implementado sem o uso de nenhum biblioteca/funções exceto as matemáticas);
7. 1 ou 2 exemplos;
8. Resolver $f(x) = x^3 - 9x + 3$;
9. Lista de 4 exercícios resolvidos;
10. Elaborar a apresentação (preferência em $\LaTeX$);
11. Mostrar prévia do trabalho 1 semana antes da entrega;
12. Avaliação individual, todos devem apresentar.

Trabalho 1

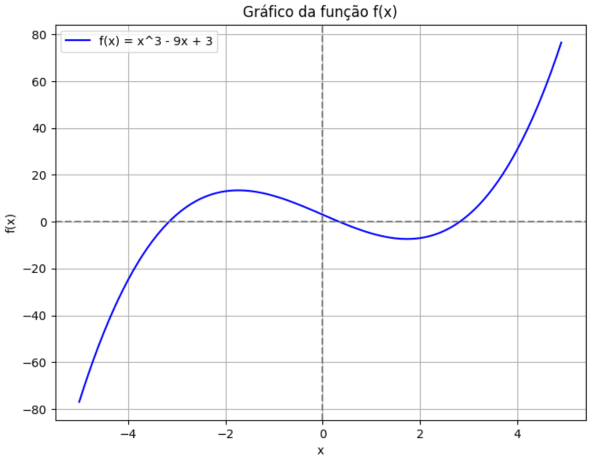
Será encontrado um número muito próximo da raiz real, dentro de uma tolerância definida como $\epsilon = 1 \times 10^{-6}$.

Intervalo	Método	Raiz Aproximada	Iterações
$[0, 1]$	Bisseção	$0{,}335785$	22
$[0, 1]$	Ponto Fixo	$0{,}337609$	6
$[0, 1]$	Newton-Raphson	$0{,}335785$	4
$[0, 1]$	Secante	$0{,}335785$	5
$[0, 1]$	Muller	$0{,}335785$	3

Table 1: Comparação dos métodos numéricos aplicados à função $f(x) = x^3 - 9x + 3$ no intervalo $[0; 1]$

.

Função de terceiro grau



Gerar gráfico em Python

```
!pip install matplotlib
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# Definindo a função f(x)
def f(x):
    return x**3 - 9*x + 3
```

```
x_values = np.arange(-5, 5, 0.1) # Criando um array de valores de x
y_values = f(x_values) # Calculando os valores de f(x) para cada x
# Plotando o gráfico
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(x_values, y_values, label='f(x) = x^3 - 9x + 3', color='b')
plt.axhline(0, color='gray', linestyle='--')  # Linha horizontal y=0
plt.axvline(0, color='gray', linestyle='--')  # Linha vertical x=0
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.title('Gráfico da função f(x)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

Método de Bolzano

Teorema
Seja uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$, tal que, $f(a) \times f(b) < 0$, então a função $f(x)$ possui pelo menos uma raiz no intervalo $[a, b]$.

"O teorema assegura que se f troca de sinal nos pontos a e b então f tem pelo menos um zero entre estes pontos".

Exemplo

Seja a função $f(x) = x \times \ln(x) - 3{,}2$.
Calcule o valor de $f(x)$ para valores arbitrários de x, como mostrado na tabela abaixo:

x	1	2	3	4

Exemplo

Seja a função $f(x) = x \times \ln(x) - 3{,}2$.
Calcule o valor de $f(x)$ para valores arbitrários de x, como mostrado na tabela abaixo:

x	1	2	3	4
$f(x)$	-3,20	-1,81	0,10	2,36

Exemplo

Seja a função $f(x) = x \times \ln(x) - 3{,}2$.
Calcule o valor de $f(x)$ para valores arbitrários de x, como mostrado na tabela abaixo:

x	1	2	3	4
$f(x)$	-3,20	-1,81	0,10	2,36

Pelo teorema de Bolzano, concluímos que existe pelo menos uma raiz real no intervalo $[2, 3]$.

Ideia do Método da Bisseção

Objetivo é encontrar uma raiz real de uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, onde $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Ideia do Método da Bisseção

Objetivo é encontrar uma raiz real de uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, onde $f(a) \cdot f(b) < 0$. O processo funciona assim:

- Dividimos o intervalo $[a, b]$ ao meio, obtendo dois subintervalos:

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

Ideia do Método da Bisseção

Objetivo é encontrar uma raiz real de uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, onde $f(a) \cdot f(b) < 0$. O processo funciona assim:

- Dividimos o intervalo $[a, b]$ ao meio, obtendo dois subintervalos:

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

- Aplicamos o Teorema de Bolzano para verificar em qual dos dois subintervalos ocorre a troca de sinal.

Ideia do Método da Bisseção

Objetivo é encontrar uma raiz real de uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, onde $f(a) \cdot f(b) < 0$. O processo funciona assim:

- Dividimos o intervalo $[a, b]$ ao meio, obtendo dois subintervalos:

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

- Aplicamos o Teorema de Bolzano para verificar em qual dos dois subintervalos ocorre a troca de sinal.
- O subintervalo onde ocorre a troca de sinal passa a ser o novo intervalo de análise.

Ideia do Método da Bisseção

Objetivo é encontrar uma raiz real de uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, onde $f(a) \cdot f(b) < 0$. O processo funciona assim:

- Dividimos o intervalo $[a, b]$ ao meio, obtendo dois subintervalos:

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

- Aplicamos o Teorema de Bolzano para verificar em qual dos dois subintervalos ocorre a troca de sinal.
- O subintervalo onde ocorre a troca de sinal passa a ser o novo intervalo de análise.
- Repetimos o processo até que o comprimento do intervalo seja menor que uma tolerância predefinida (precisão).

Ideia do Método da Bisseção

Objetivo é encontrar uma raiz real de uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, onde $f(a) \cdot f(b) < 0$. O processo funciona assim:

- Dividimos o intervalo $[a, b]$ ao meio, obtendo dois subintervalos:

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

- Aplicamos o Teorema de Bolzano para verificar em qual dos dois subintervalos ocorre a troca de sinal.
- O subintervalo onde ocorre a troca de sinal passa a ser o novo intervalo de análise.
- Repetimos o processo até que o comprimento do intervalo seja menor que uma tolerância predefinida (precisão).

A cada passo, a raiz da função é aproximada pelo ponto médio do subintervalo corrente.

Método da bissecção: Critério de parada

- O critério de parada é frequentemente baseado no valor de ϵ.
- ϵ é a tolerância desejada para a precisão da raiz.
- O processo iterativo continua até que o intervalo de busca seja suficientemente pequeno, ou seja, $|b - a| < \epsilon$.
- Quando a largura do intervalo é menor do que ϵ, a raiz é considerada suficientemente precisa.

$$|b - a| < \epsilon$$

Exercício – Método da Bisseção

Considere a função:

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

Queremos encontrar uma raiz real dessa função no intervalo $[0, 1]$, aplicando o **método da bisseção**.

Use os seguintes critérios de parada:

- Número máximo de iterações: 5
- OU erro absoluto (tamanho do intervalo): $\varepsilon < 0{,}05$

Solicitado:

1. Aplique o método da bisseção para encontrar uma aproximação da raiz.
2. Preencha a tabela com os valores de a, b, c, $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, e $\varepsilon = |b - a|$.
3. Identifique o intervalo final que contém a raiz.

Resumo do Método da Bisseção

1. Escolha os valores iniciais a e b, com $f(a) \cdot f(b) < 0$
2. Calcule o ponto médio: $c = \dfrac{a+b}{2}$
3. Defina o critério de parada (tolerância ε)
4. **Enquanto** $|b - a| > \varepsilon$, faça:
   - Calcule $f(a)$, $f(b)$, e $f(c)$
   - **Se** $f(a) \cdot f(c) > 0$, então:
     - Atualize $a \leftarrow c$
   - **Senão:** mantenha o valor de a
   - **Se** $f(b) \cdot f(c) > 0$, então:
     - Atualize $b \leftarrow c$
   - **Senão:** mantenha o valor de b
   - Recalcule $c = \dfrac{a+b}{2}$
5. Ao final, c será a raiz aproximada da função

Encontro 8: Zero Funções + Aplicações

Aplicações

O objetivo desta aula é resolver problemas práticos com programação.

1. Abra a página `rogerio.in`;
2. Vá na componente Cálculo Numérico;
3. Siga as instruções do professor.

Encontro 9: Funções em Python

Aplicações

O objetivo desta aula é aprender/recordar o uso de funções em Python.

1. Siga as instruções do professor.

Encontro 10: Sistemas Lineares

Objetivos

- Definição
- Introdução
- Solução do sistema
- Método de Gauss

Formas de Resolver Sistemas Lineares

Métodos Diretos:
Solução em número finito de passos:

- Regra de Cramer
- Eliminação de Gauss
- Eliminação com pivotamento
- Decomposição LU
- Inversão de matriz

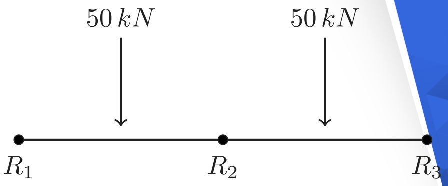
Métodos Iterativos:
Aproximações sucessivas:

- Método de Gauss-Jacobi
- Método de Gauss-Seidel
- Método SOR
- Gradiente Conjugado (casos específicos)

Engenharia Civil: Reações em Apoios de Viga

- Uma viga recebe uma carga total de 100 kN.
- A viga está apoiada em três pontos: R_1, R_2 e R_3.
- Deseja-se encontrar as reações nos apoios.
- Sistema:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 + R_3 = 100 \\ 2R_1 + 4R_2 + 6R_3 = 400 \\ R_1 = R_3 \end{cases}$$

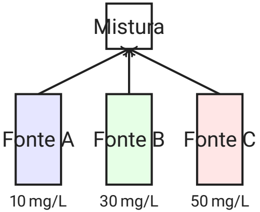


Engenharia Ambiental: Mistura de Fontes de Água

- Objetivo: formar uma mistura com 1000 L de água.
- Três fontes disponíveis:
  - Fonte A: 10 mg/L de poluente
  - Fonte B: 30 mg/L
  - Fonte C: 50 mg/L
- A mistura final deve ter 25 mg/L.
- Restrição técnica: usar mesma quantidade de A e C.

Sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1000 \\ 10x + 30y + 50z = 25000 \\ x = z \end{cases}$$



Sistema Lineares

Sistemas lineares são um conjunto de equações lineares que deverão ser resolvidas ao mesmo tempo.

Equação linear

Uma equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma equação que pode ser expressa na forma padrão

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = c$$

em que $a_1, a_2, ..., a_n$ é chamado de *coeficientes*. O $x_1, x_2, ..., x_i$ são as *incógnitas* e por fim, c é chamado de *termo independente*.

Sistemas Lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = c_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Sistema linear com:

- m equações
- n incógnitas

Exemplos:

$$\begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ -x + 3y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x & + & 3y & + & 5w & + & z & = & 2 \\ 5x & + & 3y & + & w & - & 2z & = & -1 \\ 3x & - & 5y & & & & & = & 5 \end{cases}$$

Equação Linear Homogênea

- Uma equação linear é dita **homogênea** quando seu termo independente é igual a zero:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

- Se o termo independente $c \neq 0$, a equação é **não homogênea**.
- Um sistema linear é **homogêneo** quando **todas as equações** que o compõem são homogêneas.

Exemplos:

- $x + 2y - 4z = 7 \quad \rightarrow$ **não homogênea**
- $-x - 5z = 15 \quad \rightarrow$ **não homogênea**
- $t + 2u + 3v = 0 \quad \rightarrow$ **homogênea**

Obs.: Somente a última equação acima é homogênea. Para que um sistema seja homogêneo, todas devem ter zero no lado direito.

Sistemas Lineares

Solução do sistema

$$(x_1, x_2, x3, \cdots, x_n)$$

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Sistema linear homogêneo:
Exemplo:

$$\begin{cases} 5x & - & y & - & 4z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \end{cases}$$

Sistemas Lineares

Exemplo:

$$\begin{cases} x & - & y & - & z & = & 0 \\ x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{cases}$$

Vamos validar com:

$$(0,0,0)$$
$$(0,1,-1)$$
$$(1,1,1)$$

Classificação dos Sistemas Lineares

Um sistema linear pode ser classificado em três tipos:

- **Possível e Determinado:** possui uma única solução.
- **Possível e Indeterminado:** possui infinitas soluções.
- **Impossível:** não possui solução.

Dica visual: para sistemas com duas equações e duas incógnitas, pense nas retas:

- Uma interseção $\rightarrow$ solução única;
- Retas coincidentes $\rightarrow$ infinitas soluções;
- Retas paralelas $\rightarrow$ nenhuma solução.

Sistema Impossível (sem solução)

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Ao subtrair as equações:

$$(x + y) - (x + y) = 2 - 5 \Rightarrow 0 = -3$$

Conclusão

Sistema **impossível**, pois há contradição. As retas são paralelas.

Sistema Possível e Indeterminado (infinitas soluções)

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

A segunda equação é múltiplo da primeira:

$$2(x + y) = 2 \cdot 3 = 6$$

Conclusão

Sistema **possível e indeterminado**, pois as equações são equivalentes. Ambas representam a mesma reta.

Método de Cramer – Conceito e Etapas

Aplicação: sistemas lineares com o mesmo número de equações e incógnitas (sistemas quadrados), com $\det(A) \neq 0$.

Objetivo: resolver o sistema $A\vec{x} = \vec{b}$

Passos do método:

1. Calcular o determinante da matriz dos coeficientes $\det(A)$
2. Para cada incógnita x_i, substituir a coluna i de A pelo vetor dos termos independentes b, formando a matriz A_i
3. Calcular $\det(A_i)$
4. Obter cada incógnita pela fórmula:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

Determinante de matriz 2×2 – Visual com Diagonais

Matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

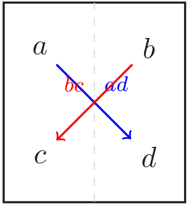
Fórmula:

$$\det(A) = ad - bc$$

Interpretação:

- Diagonal principal (a $\rightarrow$ d): $a \cdot d$
- Diagonal secundária (b $\rightarrow$ c): $b \cdot c$

$$\boxed{\det(A) = a \cdot d - b \cdot c}$$



Método de Cramer – Representação para 2 incógnitas

Sistema genérico:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Fórmulas para a solução:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Observação

O método é eficiente apenas para sistemas pequenos. Em sistemas maiores, métodos como eliminação de Gauss são mais indicados.

Exemplo – Resolução com Regra de Cramer

Sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x - y = 10 \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Determinante de A:

$$\det(A) = 2{\cdot}(-1) - 4{\cdot}3 = -2 - 12 = -14$$

Matriz A_1:

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \det(A_1) = 8{\cdot}(-1) - 10{\cdot}3 = -8 - 30 = -38$$

Matriz A_2:

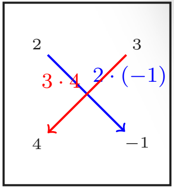
$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \det(A_2) = 2{\cdot}10 - 4{\cdot}8 = 20 - 32 = -12$$

Solução:

$$x = \frac{-38}{-14} = \frac{19}{7} \qquad y = \frac{-12}{-14} = \frac{6}{7}$$

$$\boxed{x = \frac{19}{7}, \quad y = \frac{6}{7}}$$

Visualização: cálculo de $\det(A)$



$$\det(A) = -2 - 12 = -14$$

Método de Sarrus

Aplicação: cálculo do determinante de matrizes 3×3.

Passos do método:

1. Escreva a matriz original.
2. Repita as duas primeiras colunas à direita.
3. Multiplique as diagonais descendentes e some os produtos.
4. Multiplique as diagonais ascendentes e some os produtos.
5. Subtraia os dois resultados.

Fórmula:

$$\det(A) = aei + bfg + cdh \;-\; ceg + bdi + afh$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Etapas:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

Diagonais:

$$1 \cdot (-1) \cdot 0 = 0, \quad 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16, \quad 3 \cdot 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow Soma = 16$$

Diagonais:

$$3 \cdot (-1) \cdot 2 = -6, \quad 1 \cdot 4 \cdot 1 = 4, \quad 2 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow Soma = -2$$

$$\boxed{\det(A) = 16 - (-2) = \mathbf{18}}$$

Sistemas Lineares

Método da Eliminação de Gauss

Processo

Consiste em transformar o sistema $Ax = b$ em um sistema equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior, por meio de transformações elementares ou transformações equivalentes.

$$\boxed{Ax = b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tilde{A}x = \tilde{b}}$$

Sistemas Lineares

Método da Eliminação de Gauss

Teorema

Seja $Ax = b$ um sistema linear, se:

1. Trocarmos duas equações;
2. Multiplicarmos uma equação por uma constante não-nula;
3. Adicionarmos um múltiplo de uma equação a outra equação.

O método da eliminação de Gauss engloba duas fases:

1. Fase de eliminação;
2. Fase de substituição.

Sistemas Lineares

1. Fase de eliminação

1. Transformações elementares na matriz aumenta $[A|b]$
2. Para uma matriz $(n \times n)$ este processo terá $(n-1)$ etapas

Procedimento

1. Montar a matriz aumenta $[A|b]$
2. Determinação do pivô: a_{kk}
3. Definir os multiplicadores de linha

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

4. Atualização das linhas

$$L_i \leftarrow L_i - m_{ik} \times L_{\text{pivô}}$$

Sistemas Lineares

Exemplo

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & & & 3x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4 \end{cases}$$

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & \vdots & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

Passo 1: Quem é o pivô? Tudo abaixo do pivô deverá ser zero.

Pivô

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & \vdots & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

Passo 2: Operar nas linhas

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & \vdots & -7 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & \vdots & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

Passo 2: Operar nas linhas

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & \vdots & -15 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

Passo 2: Operar nas linhas

$L_4 \leftarrow L_4 + L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & \vdots & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & \vdots & 8 \end{bmatrix}$$

Concluído para a primeira coluna. Repetir agora para a segunda coluna. Trocar o pivô.

Sistemas Lineares

Passo 2: Operar nas linhas

$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & \vdots & 13 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & \vdots & 8 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

Passo 2: Operar nas linhas

$L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & \vdots & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & \vdots & -13 \end{bmatrix}$$

Concluído, valores abaixo da diagonal são zeros.

Sistemas Lineares

Passo 3: Reescrever o sistema e resolver

Sistema reescrito

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & & & 3x_4 & = & 4 \\ & - & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7 \\ & & & - & 3x_3 & + & 13x_4 & = & 13 \\ & & & & & - & 13x_4 & = & -13 \end{cases}$$

Agora basta calcular os valores de x_1, x_2, x_3 e x_4.

Sistemas Lineares

Fase da substituição

Substituindo uma equação na outra...

Sistema reescrito

- Equação (4): $-13x_4 = -13 \Rightarrow x_4 = 1$
- Equação (3): $3x_3 + 13 = 13 \Rightarrow x_3 = 0$
- Equação (2): $-x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \Rightarrow x_2 = 2$
- Equação (1): $x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \Rightarrow x_1 = -1$

Lista de Exercícios – Sistemas Lineares

Exercício 1:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x - y = 10 \end{cases}$$

Exercício 2:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

Exercício 3:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Exercício 4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 13 \end{cases}$$

Exercício 1 – Resolução com Regra de Cramer

1. Matriz dos coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

2. Determinante de A:

$$\det(A) = (2)(-1) - (4)(3) = -2 - 12 = -14$$

3. Matriz A_1:
(substitui 1ª coluna por b)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_1) = (8)(-1) - (10)(3) = -8 - 30 = -38$$

4. Matriz A_2:
(substitui 2ª coluna por b)

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_2) = (2)(10) - (4)(8) = 20 - 32 = -12$$

5. Solução final:

$$x = \frac{-38}{-14} = \frac{19}{7}, \quad y = \frac{-12}{-14} = \frac{6}{7}$$

$$\boxed{x = \frac{19}{7}, \quad y = \frac{6}{7}}$$

Exercício 2 – Resolução com Regra de Cramer

1. Matriz dos coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2. Determinante de A:

$$\det(A) = (1)(1) - (3)(-2) = 1 + 6 = 7$$

3. Matriz A_1:
(substitui 1ª coluna por b)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_1) = (1)(1) - (7)(-2) = 1 + 14 = 15$$

4. Matriz A_2:
(substitui 2ª coluna por b)

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_2) = (1)(7) - (3)(1) = 7 - 3 = 4$$

5. Solução final:

$$x = \frac{15}{7}, \quad y = \frac{4}{7}$$

$$\boxed{x = \frac{15}{7}, \quad y = \frac{4}{7}}$$

Exercício 3 – Resolução com Eliminação de Gauss

1. Montar a matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \text{troca } L_1 \leftrightarrow L_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

2. Eliminação de Gauss:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & -10 & -5 \end{array}\right]$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

3. Substituição regressiva:

$$x_3 = 0, \quad -x_2 = -5 \Rightarrow x_2 = 5, \quad x_1 + 5 = 2 \Rightarrow x_1 = -3$$

Solução final:

$$\boxed{x_1 = -3, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 0}$$

Exercício 4 – Resolução com Eliminação de Gauss

2. Matriz aumentada inicial:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 13 \end{array}\right]$$

3. Eliminação na 1ª coluna:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

4. Eliminação na 2ª coluna:

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

5. Eliminação na 3ª coluna:

$$L_4 \leftarrow L_4 + \frac{7}{5}L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

6. Substituição regressiva:

$$x_4 = 2$$

$$x_3 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$x_1 = 1$$

Solução final:

$$\boxed{x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 2}$$

Encontro 11: Sistemas Lineares + Aplicações

Aplicações

Enunciado do problema.

- Passo 1
- Passo 2

O objetivo desta aula é resolver problemas práticos com programação.

1. Abra o Python
2. Siga as instruções

Encontro 12: Sistemas Lineares

Objetivos

- Critério de parada
- Gauss-Jacobi
- Gauss-Seidel

Critério de parada

Podemos usar o critério de parada/convergência para ambos os métodos de resolução de sistemas lineares. Os sistemas iterativos deverão ter um critério de parada.

Epsilon

$$\epsilon = \frac{max||x^{k+1} - x^{(k)}||}{max||x^{(k+1)}||}$$

Gauss-Jacobi

É baseado na decomposição da matriz A em uma soma de três matrizes D, L e U, onde D é uma matriz diagonal contendo os elementos diagonais de A, L é uma matriz triangular inferior com os elementos fora da diagonal de A, e U é uma matriz triangular superior com os elementos fora da diagonal de A.

Gauss-Jacobi

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - (L+U)x^{(k)})$$

onde $x^{(k)}$ é o vetor de aproximação na iteração k, e D^{-1} é a inversa da matriz diagonal D.

Gauss-Seidel

Assim como o método de Gauss-Jacobi, ele também é baseado na decomposição da matriz A em três matrizes: D, L, e U. No entanto, o método de Gauss-Seidel atualiza as aproximações das incógnitas de forma sequencial, usando os valores mais recentes disponíveis.

Gauss-Seidel

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

onde $x_i^{(k)}$ é a aproximação da incógnita x_i na iteração k, a_{ij} é o elemento na linha i, coluna j da matriz A, e b_i é o i-ésimo componente do vetor b.

Gauss-Jacobi-Seidel

Resolva esse sistema linear utilizando ambos os métodos e considere o erro em 0,1. Responda com quantas iterações ambos os sistemas convergiram.

Sistema linear

$$\begin{cases} 10x_1 + & 2x_2 + & x_3 = & 7 \\ x_1 + & 5x_2 + & x_3 = & -8 \\ 2x_1 + & 3x_1 + & 10x_3 = & 6 \end{cases}$$

Gauss-Jacobi-Seidel

Resolva esse sistema linear utilizando ambos os métodos e considere o erro em 0,1. Responda com quantas iterações ambos os sistemas convergiram.

Sistema linear

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -17 \end{cases}$$

Encontro 13: Sistemas Lineares + Aplicações

Aplicações

Enunciado do problema.

- Passo 1
- Passo 2

O objetivo desta aula é resolver problemas práticos com programação.

1. Abra o Python
2. Siga as instruções

Importante!

Este material é exclusivo de uso do autor. Proibido copiar ou replicar.

rogeriovargas@ufpr.br

Cálculo Numérico

Um guia prático com Python

Prof. Dr. Rogério Vargas[1]

[1]Centro de Estudos do Mar
Universidade Federal do Paraná

2025

GEOIDELAB

UFPR